SKK Mathematical Modelling H.R.D. Division

http://bkmath.skku.ac.kr

Mathematical Modeling of real world problems

by Sang-Gu LEE with Math Modeling students

Contents

Ⅰ. Introduction

수학의 역사는 인류의 역사와 더불어 오래되었으며 인류의 사회생활에 필요한 모든 계산과, 농경생활에 필요한 천문, 역(曆)의 제정, 토지의 측량 등에도 사용되었다. 17세기이후 과학혁명과 어우러져 물리학과 천문학 등 여러 방면의 새로운 분야들이 개척되는 과정에서 수학의 급속한 진보가 있었으며 기하학, 대수학의 세계에서 해석학으로 발전되면서 물리학에도 큰 영향을 끼치게 된다. 19세기부터 부단히 발전해온 여러 분야의 바탕이 되는 수학의 기초에 대한 반성과 비판자체가 또한 수학의 대상으로 부상하게 되고, 수학의 기초에 눈을 돌리게 된다. 현대 수학은 기초를 확립하는 작업을 추진하면서, 한편으로 종래의 성과위에 새로운 성과를 축척하며, 수학의 많은 분야의 통일과 응용을 추구하는 등 발전을 거듭하고 있다.

오늘날 과학과 기술의 발전은 수학의 도움 없이 결코 이룩될 수 없었으며 기초가 되는 수학은 물론 확률론, 수리통계, 계산기, 컴퓨터의 발전과 발명은 그 응용범위를 더욱 확대하게 만들었다. 수학은 이제 자연과학은 물론 인문과학, 사회과학, 생산기술과 경제, 경영의 문제에 까지도 영향력을 미치게 되었다.

우리는 일상생활에 뿌리 깊게 영향을 미치는 학문인 수학이 수학적 모델로서 우리들이 생활하는 일상생활에 깊이 적용이 되고 있다는 것을 선형 모델을 중심으로 간단한 예와 함께 소개하고 분석한다.

수학적 모델링이란 현실 세계의 문제를 수학적으로 표현하는 과정이다. 또, 모델링하는 과정에서는 주어진 문제의 성질중 주요 변수를 중심으로 선택하여 수식화 한다. 만들어진 모델은 모델링하려는 시스템을 완전히 표현하지는 못하더라도 원래 문제가 가졌던 중요한 성질은 갖고 있어야 한다. 즉, 주어진 문제에 대한 답을 구할 수 있을 정도로 원래의 현상을 잘 설명할 수 있어야 한다. 더구나, 이 답을 구하는 과정이 우리가 배운 지식으로 쉽게 해결될 수 있어야한다.

1장에서는 간단한 선형 모델에서 시작하여 검색엔진의 기본적인 지식을 소개하고, 2장에서는 구글에서의 페이지랭크(Page Rank)의 개념을 이용한 구글(Google) 검색시스템의 기본적인 알고리즘에 대해서 중점적으로 알아본다. 또한 구글 행렬(Google Matrix)을 실제 수도권 지하철노선에 적용시켜, 인원의 흐름까지 고려한 각 지하철역의 실제 중요도를 파악하는데 구글 행렬이 어떻게 쓰이는지 살펴본다.

Ⅱ. 본론

제1장 선형모델에 대한 소개와 예제

도시와 시골에 거주하고 있는 우리나라의 인구를 매년 시골에서 도시로의 일정한 인구가 이주하고, 또한 도시에서 시골로 일정한 인구가 이주한다고 하면 오랜 기간 후 우리나라의 도시와 시골의 인구분포는 어떻게 되는지 행렬을 이용해서 분석해 보면 k년 후의 도시와 시골의 인구를 구하는 문제에 수학적 선형모델이 이용된다[이상구, 2005].

1973년 경제학자 웨슬리 레온티에프(Wassily Leontief)는 경제현상에서 다양한 요인들 사이의 관계를 연구하며 행렬을 이용한 방법을 소개한 공로로 노벨 경제학상을 수상하였다. 레온티에프(Leontief)가 소개한 투입산출모델의 일부를 소개한다. 간단한 경제 시스템을 생각하자.

	출 력			
입력		생산업	농업	기타
	생산업	0.6	0.2	0.2
	농업	0.1	0.6	0.1
	기타	0.2	0.1	0.4

[표 1] 출력(생산품)을 생산하기 위한 요구되는 입력(투자)를 표시 (단위 : 만원)

이것을 행렬로 표현하면 다음과 같다.

$$C = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.2 & 0.2 \\ 0.1 & 0.6 & 0.1 \\ 0.2 & 0.1 & 0.4 \end{bmatrix}$$

이런 행렬을 소비행렬이라 한다. 각 열벡터들은 1만원가치의 출력을 만들어내기 위하여 필요로 하는 생산업, 농업, 기타 부분의 입력을 나타낸다. 농산물을 생산하는 농민은 외부에서 구입을 원하는 만큼의 농산물을 생산함과 동시에 그 과정에서 본인들도 그 생산물의 일부를 소비하게 된다. 이를 위하여 x_1만원의 공산

품, x_2만원의 농산물, x_3만원의 기타의 투입이 필요하다고 하면

$$x_1\begin{bmatrix}0.6\\0.1\\0.2\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}0.2\\0.6\\0.1\end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix}0.2\\0.1\\0.4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.6&0.2&0.2\\0.1&0.6&0.1\\0.2&0.1&0.4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=C\mathrm{x}$$

로 방정식이 만들어지고 $C\mathrm{x}$를 주어진 경제 시스템에 대한 중간 수요벡터라 한다. 외부수요를 $\mathrm{d}=\left[d_1\ d_2\ d_3\right]^T$라 한다면 전체생산 x에서 중간 수요 $C\mathrm{x}$를 뺀 나머지가 외부수요 d를 충족시켜야 한다.

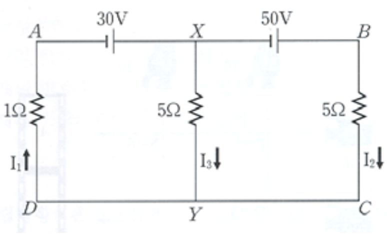
$$\mathrm{x}-C\mathrm{x}=\mathrm{d}$$

$$\Rightarrow(I-C)\mathrm{x}=\mathrm{d}$$

여기서 행렬 $I-C$를 레온티에프 행렬(Leontief matrix)이라고 한다. 또한 위의 식을 레온티에프(Leontief)방정식이라 한다. 더구나 위와 같이 특수한 모양의 행렬의 성질을 연구함으로서 유관한 많은 문제에 효과적인 답을 줄 수 있다[이상구, 2006].

위에서는 사회과학에서의 선형모델에 대하여 알아보았다. 이제 공학에서의 선형모델에 대하여 소개한다.

[그림 1]과 같이 30V의 전지와 50V의 전지가 두 개의 5Ω의 저항기, 1Ω의 저항기와 함께 연결되어있는 전기회로를 생각하자. 각 저항기를 흐르는 전류 I_1, I_2, I_3을 구할 수 있는 모델을 생각해보자.



[그림 1]

옴(Ohm)의 법칙, 키르히호프의 전류법칙과 키르히호프의 전압법칙을 이용하여 세 전류 I_1, I_2, I_3에 관한 연립방정식을 만들게 되면 다음과 같다. 우선 점 Y에서의 전류의 법칙을 적용하면 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$I_1 = I_2 + I_3$$

그리고 두 작은 폐회로 $AXYD$, $XBCY$에서 전압법칙과 옴(Ohm)의 법칙을 적용하면 다음 2개의 식을 얻게 되고,

$$1I_1 + 5I_3 = 30$$

$$-5I_3 + 5I_2 = 50$$

위 세 방정식을 통해서 다음과 같은 첨가행렬을 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & : & 0 \\ 1 & 0 & 5 & : & 30 \\ 0 & 5 & -5 & : & 50 \end{bmatrix}$$

위의 첨가행렬의 해를 구하면 각 저항기에 흐르는 전류 I_1, I_2, I_3을 구할 수 있다[이상구, 2006, p.62].

위의 예제들은 식이 모두 선형이기 때문에 선형모델(Linear Models)이라고 부른다. 수학적 모델링에서 선형 모델을 주로 사용하는 이유는 다음과 같다. 비선형 연립방정식을 풀 수 있는 일반적인 이론은 없으나 연립일차방정식을 풀 수 있는 일반적인 이론은 있다. 여러 개의 변수를 가진 비선형 방정식으로 표현된 식을 통하여서는 실제 현상들을 이해하기 어렵다. 비선형 연립방정식은 계수의 작은 변화에도 전체에 큰 변화를 가져오므로 안정적인 시스템을 갖기 어렵다. 모든 비선형 현상들도 작은 간격으로 끊어보면 거의 선형이고, 따라서 선형 문제로서 바꾸어서 처리할 수 있으므로 선형모델은 특히 중요하다. 이외에도 교통문제, CT 촬영, 화학반응식, 암호모델, 컴퓨터공학, 인터넷 등에서 자주 쓰이는 다양한 선형모델이 존재한다.