2013년 봄 한국수학교육학회 춘계학술대회

초기 선형대수학의 역사

(Early History of Linear Algebra)

2013년 4월 5-6일

이화여자대학교

이상구*, 이재화, 함윤미

sglee@skku.edu

성균관대학교

0. 초록

- 행렬 및 벡터공간을 다루는 선형대수학은 사회의 복잡한 현상을 선형화 과정을 거쳐 선형연립방정식이라는 단순한 형태의 수학 문제로 바꾼 후 실제로 해결하는 데 결정적으로 기여한다.

- 이와 같은 이유로 20세기 중반까지 추상적인 고등수학 과목으로만 여겨지던 선형대수학이 현재는 자연-공학-사회계열 분야 학생의 대부분이 배우는 기본 교과목이 되었다.

- 선형대수학은 <산수서>, <구장산술>, 세키 고와, 뫼비우스, 그라스만 실베스터, 케일리 등을 거치면서 비선형적으로 발전해왔다. 본 연구에서는 우리는 새로 발굴한 내용을 중심으로 초기 선형대수학의 발전에 기여한 중국, 일본, 그리고 서양의 수학자들에 대하여 다룬다.

참고 문헌

1. 이상구·함윤미 (2006). 실베스터와 클라인 그리고 19세기 미국 수학, 한국수학사학회지, 19(2), 77-88.

2. Benzi, M. (2009). The Early History of Matrix Iterations: with a Focus on the Italian Contribution, presented at the SIAM Conference on Applied Linear Algebra, Monterey, California.

3. Crowe, J. (1967). A History of Vector Analysis: The Evolution of the Idea of a Vectorial System, University of Notre Dame Press.

4. Crilly, T. (2006). Arthur Cayley: Mathematician Laureate of the Victorian Age, JHU Press.

5. Dorier, J. (1995). A General Outline of the Genesis of Vector Space Theory, Historia Mathematica, 22, 227-261.

6. Fearnley-Sander, D. (1979). Hermann Grassmann and the creation of linear algebra, The American Mathematical Monthly, 86(10), 809-817.

7. Hart, R. (2010). The Chinese Roots of Linear Algebra, JHU Press.

Higham, N. (2009). Cayley, Sylvester, and Early Matrix Theory, presented at the SIAM Conference on Applied Linear Algebra, Monterey, California.

8. Parshall, K. H. (2006). James Joseph Sylvester. Jewish Mathematician in a Victorian World, JHU Press.

1. 서론

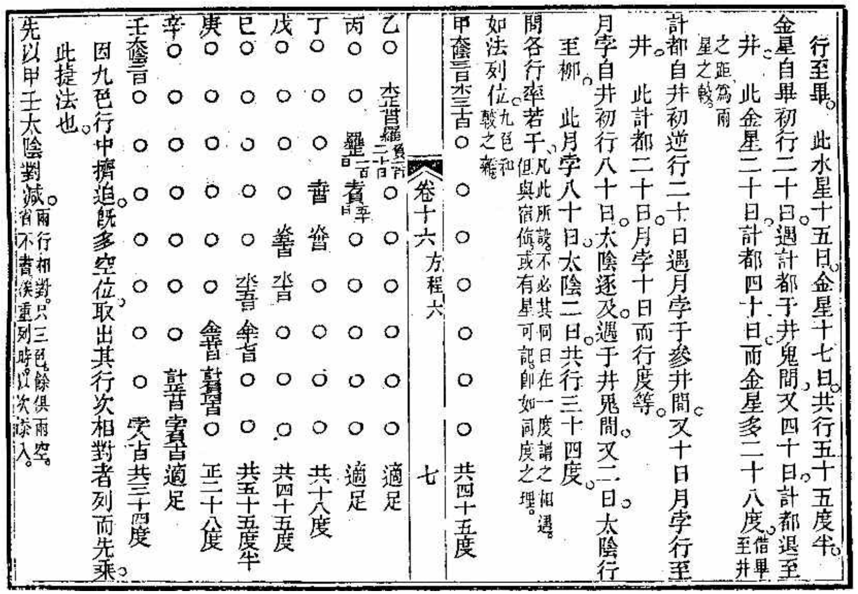
- 현대 생활 속에 다양하게 쓰이는 행렬을 다루는 선형대수학은 1950년대까지 대수학에서도 가군(Module)을 다루는 대학원 과정의 추상적인 고등수학으로만 여겨졌으나 1960년대부터 학부교육의 주요 수학과목으로 자리하게 되었다. 특히 한국의 경우에는 1980년대까지만 하더라도 수학과 과목으로만 여겨졌으나 1990년대가 되면서 자연-공학-사회계열 학생들 대부분이 학습하는 과목이 되었다.

- 본 논문에서는 선형대수학에 대한 중국의 기여, 뫼비우스 (Möbius, 1790-1868)와 그라스만 (H. Grassmann, 1809-1877)을 중심으로 초기 선형대수학의 발전과 현대 대학수학교육에서 선형대수학의 의미에 대하여 국내에서 최초로 그리고 구체적으로 소개한다.

2. 본론

가. 선형연립방정식의 해법과 선형대수학의 탄생

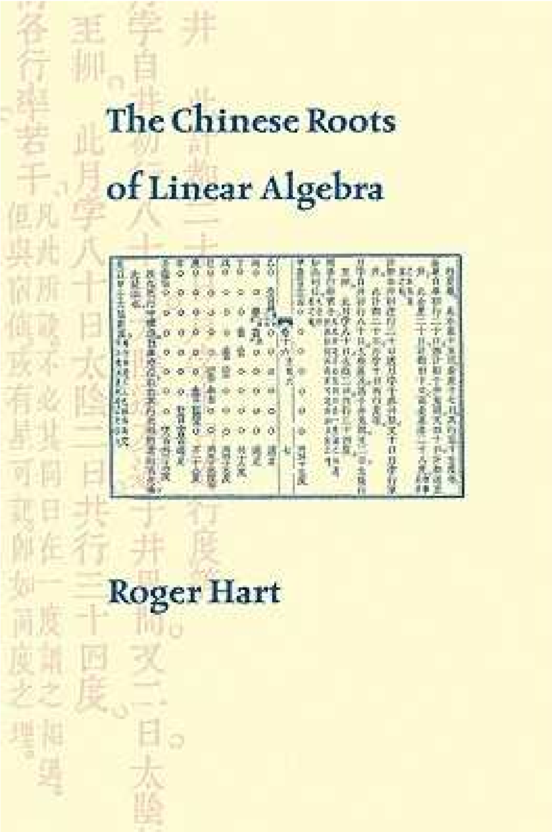
선형대수학의 핵심적인 내용은 **선형연립방정식에 대한 다양한 해법**이다. 고대 바빌로니아인들도 기원전 4세기경에 선형연립방정식으로 이어지는 문제들을 연구하였다. **현존하는 문헌 중에 가장 오래된 것은 한(漢)왕조 때인 BC 200년에서 BC 100년 사이에 쓰여진 <구장산술(九章算術)> 제8장「방정(方程)」장**으로, 여기에 **행렬에 관한 문제를 다루는 해법인 방정술**(方程術)이 소개되어 있다.[1] 또한 **1984년 장가산(張家山)의 무덤에서 발굴된 한나라 죽간(竹簡) <산수서(筭數書)> (c.186 B.C.E.)[2] 기록에는 두 개의 미지수를 갖는 연립방정식의 해법이 <구장산술>보다 이른 BC 2세기 이전에 이미**



<그림 3> <구장산술>「방정」장

1) http://www.math.uiuc.edu/documenta/vol-ismp/10_yuan-ya-xiang.pdf
2) http://www.nri.org.uk/SuanshushuC.Cullen2004.pdf

중국에서 사용되었다는 것을 확인해 준다.[3] 즉, 동양에서의 선형대수학 연구의 시작은 기원전 2세기 이전부터 있었다.



<그림 2> *The Chinese Roots of Linear Algebra*

2012년 1학기 서울대학교에서 방문교수로 한 학기 동안 과학사 강의를 한 미국의 하트(Roger Hart) 교수는 2010년 'The Chinese Roots of Linear Algebra'라는 제목의 책(Hart, 2010)을 발간하였다. 그는 <구장산술>의「방정」장을 중심으로 서술하면서 선형연립방정식에 대한 고대 중국의 해법을 자세히 기술하고 있다. 특히 이 책은「방정」을 산반(算盤) 위에 구성한 150 개의 표와 현대 선형대수학 기호를 이용하여 성공적으로 재구성하였다. 그리고 함축적으로 서술된「방정」장 원본을 현대 선형대수학의 용어로 라이프니츠(G. W. Leibniz, 1646-1716), 세키 고와(Seki Kowa, 関孝和, 1642-1708), 가우스(J. C. F. Gauss, 1777-1855)와 연결하여 구체적으로 서술하였다. 하트는 이 책에서 방정장의 영부족(贏不足, excess and deficit)을 이용하는 두 개

3) Journal of the American Oriental Society 131:4 (2011), pp.652-655.

의 미지수를 갖는 두 개의 방정식의 해법과 방정장이 $n+1$개의 미지수를 갖는 n 개의 방정식을 복원하여 행렬식 계산(determinantal calculation)의 가장 오래된 기록임을 확인하였다. 이는 세키나 라이프니츠의 17세기 기록보다 훨씬 앞선 것이다.

- <구장산술>「방정」장의 문제들은 산반 위에 이차원 형태로 배열되었는데, 그 모습은 현대 선형대수학의 첨가행렬과 유사하나 다만 숫자를 기술하는 체계나 배열 방향이 다르다. 그러나 산반의 배열을 시계반대방향으로 90도 회전하면 현재의 첨가행렬과 같아지는 것을 확인할 수 있다. 더구나 방정술은 행과 열이 서로 바뀌었을 뿐, 오늘날 ‘가우스 소거법(Gaussian elimination)’으로 알려진 방법과 기본적으로 같다.

- Hart 교수는 「방정」장에서 첨가행렬, 가우스소거법, 행렬식의 계산을 발굴한 것이다. 그리고 라이프니츠나 세키가 이 중국 책의 영향을 받았는지를 확인하는 것은 매우 흥미있는 연구가 될 것이라고 지적하였다.

- 흥미있는 것은 <구장산술>에 사용된 숫자가 한자 (四 ‘four’, 六 ‘six’, 八 ‘eight’, etc.)가 아니라, 산대(counting rod)를 이용하여 나타낸(rod-numeral) (≡ ‘4’, ⊥

‘6’, Ⅲ ‘8’, etc.)라는 것이다. 이는 당시에 계산도구인 산대를 사용하였다는 것을 확인해주는 것이다. 또 방정술은 하나의 수를 한 열(row)에 곱하는 것을 포함하는 방법으로 분수를 만들지 않고 정수 상태를 보존하는 특징이 있으며, 그 과정에서 행과 열을 바꾸는 연산도 생기지 않는다. 그러나 이 때 사용된 후진 대입법(back substitution)은 현대 선형대수학의 접근법과는 약간의 차이가 있음도 확인된다(Hart, 2010). 또한 행렬을 이루는 대부분의 성분은 양수를 다루지만 음수와 영, 분수를 다루는 것도 포함되어 있다. 그러나「방정」장에서 다룬 문제들은 모두 유일한 해를 가지고 있는 경우로 다소 제한적임도 주지하여야 한다.

- <구장산술>에서 소개된 해법은 약 2,000년 후인 19세기 초까지도 세계에 널리 알려지지 않았다가 가우스가 팔라스 소행성(asteroid Pallas)의 연구 중에 현재의 ‘가우스 소거법’이라 불리는 방법으로 새롭게 태어났다. 하트는 또한 근대 이전(pre-modern) 시기의 중국 선형대수학 문제, 답, 그리고 원문을 모아서 데이터베이스화하였는데 이 자료는 웹주소(http://rhart.org/algebra/)에서 확인할 수 있다.

- 행렬과 행렬식의 연구는 모두 선형연립방정식의 연구에서 비롯되었다. 흥미로운 것은 행렬의 개념이 행렬식의 개념보다 훨씬 나중에 소개되었다는 것이다. 행렬식의 개념은 일본인 세키 고와가 1683년에 처음 소개했으며,[4] 2×2, 3×3, 4×4, 5×5행렬의 행렬식을 구하는 방법을 찾아

서 방정식의 해법을 구했다. 유럽에서는 행렬식의 개념이 1683 (또는 1693)년 라이프니츠에 의하여 소개된 것으로 주장한다. 더 나아가 그 이전에 가우스에 의하여 알려졌다고 주장하는 의견도 있다. 그러나 기록에 의하면 서양에서는 1693년 라이프니츠가 로피탈(L'Hôpital)에게 보낸 편지에 비로소 처음 소개되었다.[5)]

<그림 3> 세키 고와

- 라이프니츠는 1700년과 1710년에 발표한 논문에서 소개한 계수행렬에 관한 연구를 통하여, 현재의 크래머(Cramer)공식에 이르는 기본 원리와 라플라스(Laplace) 여인자 전개식이라 불리는 결과의 기본적인 내용을 보였다.

- 특히 세키 고와는 선형대수학에서의 업적이외에도 뉴턴(Newton)과 동시대에 미적분학의 기본 개념들을 소개한 기록들이 발견되고 연구되면서 동양의 뉴턴으로 재평가되고 있다.

- 라이프니츠는 1679년 9월 8일 호이겐스(Huygens)에게 보낸 편지에서 "이미 선형대수학의 개념을 생각하기 시작했지만 아직은 이를 적절하게 표현할

4) http://cecimath.wikidot.com/seki-kowa http://en.wikipedia.org/wiki/Seki_Takakazu
http://www.math.wichita.edu/history/men/kowa.html
5) Mathematics Teacher, May 1986, "Mathematical Firsts-Who done It?", by Richard H. Williams and Roy D. Mazzagatti.

방법을 찾지 못하고 있다"고 썼는데, 이 편지가 1833년이 돼서야 공개되었다. 그 후 알려지게 된 라이프니츠의 미발표 자료에는 1678년부터 약 50년간 연구한 50가지 이상의 다양한 계수행렬 체계가 들어있었다. 그러나 편지가 공개된 1830년대에는 선형대수학에 관한 연구가 이미 많이 진행되고 있었기 때문에 그의 기여는 수학적인 관점에서는 큰 영향을 주지 못했다.

나. 근대 선형대수학의 이론적 발전과 그라스만

근대 선형대수학의 이론적 발전은 뫼비우스에 의하여 본격적으로 시작되었다. 뫼비우스는 1827년 자신의 책 'Barycentric Calculus' 에서 기하학적 대상(점)들을 가지고 직접 연산을 하는 최초의 대수적 체계를 소개하였고 동일 직선상의 선분을 어떻게 더하는지 보였다. 그러나 동일 직선상에 있지 않은 선분들에 대한 일반적인 덧셈법칙과 곱셈법칙은 아직 발견하지 못하였다.

<그림 6> 뫼비우스

이에 대한 답을 처음으로 준 수학자가 바로 그라스만이다. 그라스만은 베를린에서 수학이 아니라 신학과 철학을 공부하고 귀향하여 교사가 되었다. 그라스만은 1830년대 초부터 수학기초론을 공부하며 선형대수학을 발견하게 되었는데, 크로우(M. Crowe)는 그의 업적을 '현존하는 모든 수학과 다른 독창적인 내용(departed from all the then current mathematical traditions)'이라고 주장했다(Crowe, 1967).

그라스만은 1844년 자신의 첫 번째 책 'lineale Ausdehnungslehre (Extension)'에서 12쪽의 서문과 16쪽의 서론에 걸쳐 자신의 저술 의도에 대하여 철학적으로 자세히 설명했다.

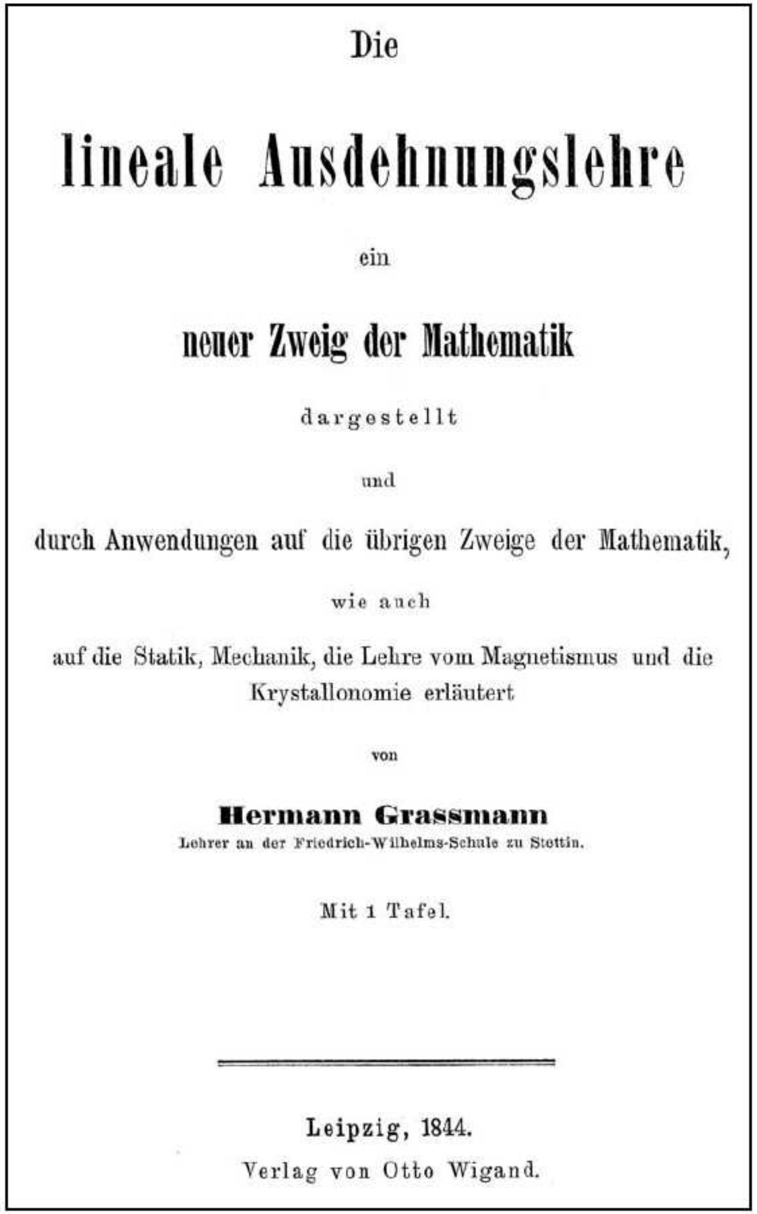
- 여기서 보인 완전히 추상적인 접근은 'n-차원 공간'과 '교환법칙이 성립하지 않는 곱셈'이라는 새로운 수학적인 아이디어를 제공했다. 1844년 그라스만은 또한 '벡터들 사이의 내적(inner product)'을 정의하여 '벡터대수(vector algebra)'를 연구하였다. 행렬 대

<그림 7> 그라스만

수는 행렬곱셈을 곱셈 연산으로 하는 벡터대수의 일반화로 볼 수 있는데, 벡터의 내적은 행렬 중 특별한 경우인 $1\times n$ 행렬과 $n\times 1$ 행렬의 곱셈으로 생각할 수 있기 때문이다. 따라서 벡터대수는 행렬

대수의 특별한 경우임을 알 수 있다. 흥미 있는 것은 벡터 대수에서는 볼 수 없었던 아름다운 수학적 구조가 일반화된 (일반적으로 더 복잡해야 한다고 생각되는) 행렬대수에서는 확연하고 더욱 간결하게 나타난다는 것이며, 이는 수학적 이론의 일반화가 갖는 기본적 중요성을 다시 일깨워 주는 것이다(이상구·강옥기, 1997).

- 그러나 그라스만이 제시한 새로운 대수적 체계를 서술하는 혁명적인 아이디어와 난해한 기술방법은 큰 장애가 된다. 가우스는 1844년 12월에 그라스만에게 쓴 편지에서 “독자에게 익숙한 용어를 사용할 것”을 권고하고 있으며, **뫼비우스가 1846년 1월에 아펠트(E. F. Appelt, 1812-1859)에게 쓴 편지에서는 “그라스만의 책은 이해하기 어려워서 한 페이지를 넘길 수가 없었다.”고 썼다.** 또 엥겔(F. Engel, 1861-1941)은 18권의 ‘Gesammelte(전집) Werke, Band 3’에서 그라스만의 업적을 실으면서 그의 업


Die

lineale Ausdehnungslehre

ein

neuer Zweig der Mathematik

dargestellt

und

durch Anwendungen auf die übrigen Zweige der Mathematik,

wie auch

auf die Statik, Mechanik, die Lehre vom Magnetismus und die Krystallonomie erläutert

von

Hermann Grassmann

Lehrer an der Friedrich-Wilhelms-Schule zu Stettin.

Mit 1 Tafel.

Leipzig, 1844.

Verlag von Otto Wigand.

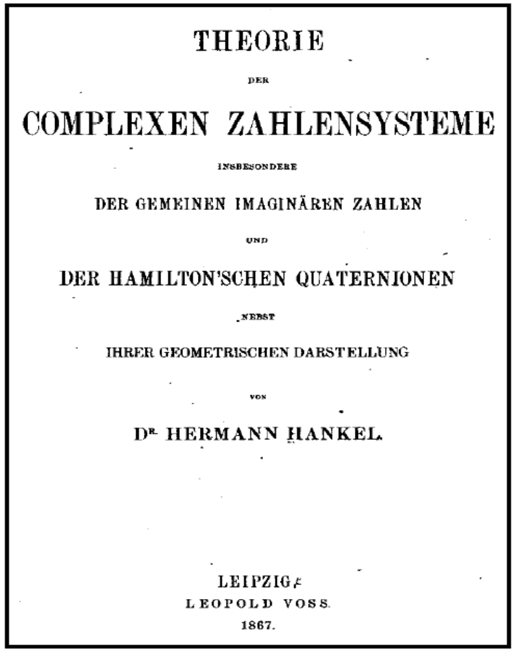
<그림 8> *lineale Ausdehnungslehre*

적과 출판이 어디서도 주목받지 못했음을 서술하였다. 그럼에도 불구하고 그라스만은 자신의 방법에 확신을 가지고 책을 다시 쓰기 시작하여 1861년 10월에 수정을 마치고, 1862년 'The second Ausdehnungslehre' 300 권을 모두 자신의 비용으로 인쇄했다. 이 책은 철학적 설명 없이 모두 정의-정리-증명(definition-theorem-proof)형식으로 썼는데(Fearnley-Sander, 1979), 여기서 제시한 내용 전체를 모두 그라스만이 처음으로 발견한 것은 아니지만 당시에 벌써 선형대수학의 거의 모든 주요 내용을 이해하고 정리한 그 완성도는 정말 놀랄만하다. 그가 다룬 선형대수학의 내용을 현대적 용어로 쓰면 다음과 같다.

'일차독립, 차원, 부분공간, 정사영, 좌표변환, 내적과 외적, 선형연립방정식의 해법, 직교, 선형변환, 선형변환의 행렬표현, rank-nullity 정리, 고유값, 고유공간, 특성방정식, 행렬의 대각화, 행렬분해, law of inertia, 미분방정식에의 응용, … '

그러나 그라스만의 2판책도 초판과 같이 처음에는 관심을 끌지 못했기 때문에 이에 실

망한 그라스만은 점차 수학에서 멀어지고, 언어학 같은 다른 분야의 연구에 집중하게 되었다. 그러나 1860년대 후반이 되면서 점점 그의 업적이 다른 수학자들에 의하여 인정을 받기 시작했다. 그를 인정한 초기 수학자 중 한 명은 리만(B. Riemann, 1826-1866)의 제자였던 항켈(H. Hankel, 1839-1873)이다.


THEORIE
DER
COMPLEXEN ZAHLENSYSTEME
INSBESONDERE
DER GEMEINEN IMAGINÄREN ZAHLEN
UND
DER HAMILTON'SCHEN QUATERNIONEN
NEBST
IHRER GEOMETRISCHEN DARSTELLUNG
VON
Dr. HERMANN HANKEL.
LEIPZIG,
LEOPOLD VOSS.
1867.

<그림 10> 항켈의 책 (1867년)

"항켈은 1867년에 책 'Complexen Zahlensysteme'에서 그라스만의 업적에 대하여 칭송하며 책 전체의 10분의 1을 그라스만의 업적으로 채웠고, 이 책은 큰 영향력을 발휘했다. …"[6]

– 항켈로부터 그라스만의 수학에 대하여 배운 클라인(F. Klein, 1849-1925)은 그라스만을 1872년 <에를랑겐 프로그램>에 소개하여 그라스만의 업적집 'Gesammelte Werke(1894-1911)'을 발간하는데 크게 기여했다.


Vergleichende Betrachtungen
über
neuere geometrische Forschungen
von
Dr. Felix Klein,
o. ö. Professor der Mathematik an der Universität Erlangen.
Programm
zum Eintritt in die philosophische Facultät und den Senat
der k. Friedrich-Alexanders-Universität
zu Erlangen.
Erlangen.
Verlag von Andreas Deichert.
1872.

<그림 9> 클라인이 그라스만을 소개한 에를랑겐 프로그램 책

6) http://www.siam.org/meetings/la09/talks/liesen.pdf

- 화이트헤드(A. N. Whitehead, 1861-1947)[7]도 자신의 1898년 책 ‘Universal Algebra, v. 1’에서 부호추론(symbolic reasoning)의 시스템을 소개했는데, 여기서 사용한 중요한 예가 바로 그라스만의 연구결과였다. 이와 동시에 행렬이론의 발전에서 실베스터(Sylvester, 1814-1897)와 케일리(A. Cayley, 1821-1895)는 결정적인 역할을 하게 되는데, 이 부분에 대하여는 다음 장에서 별도로 다루도록 한다.


CALCOLO
GEOMETRICO
secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann
PRECEDUTO DALLE
OPERAZIONI DELLA LOGICA DEDUTTIVA
PER
GIUSEPPE PEANO
TORINO
FRATELLI BOCCA EDITORI
1888

<그림 11>페아노의 책 : 그라스만의 업적

- 페아노(G. Peano, 1858-1932)도 그라스만의 업적에 크게 영향을 받게 되어 자신의 책 ‘Geometric Calculus according to the Ausdehnungslehre of H. Grassmann(1888)’에서 그라스만의 업적을 자신의 말로 표현하기 시작했다. 이 책은 특히 벡터공간에 대한 최초의 공리적 정의를 제공하였다. 1888년 페아노가 제시한 벡터공간의 정의도 사실 와일(H. Weyl)이 1918년 상대성 이론을 다루면서 그라스만의 ‘역사적인 업적(epoch making work)’이라고 인용하며 다시 제시할 때까지

7) 화이트헤드는 1900년 (국제)수학자대회 직후 제자인 러셀(B. Russell)과 함께 ‘Principia Mathematica’를 저술하였다.

는 대부분 알려지지 않은 채로 지냈다.[8]

- 그라스만의 선형대수학에 대한 다양하고 깊이 있는 발견은 1910년 이후 행렬과 벡터해석에 널리 사용되기 시작하였다. 그러나 선형대수학에 대한 그라스만의 업적은 그 구체적인 내용이 널리 알려질 때는 이미 독자적으로 연구한 다른 많은 수학자들이 행렬의 표준형(canonical form)등 다양한 연구를 활발히 하고 있었기에 **그라스만의 결과를 인용하지는 못했다.**

그라스만의 선형대수학에 대한 많은 발견 중 일부는 다른 수학자들에 의하여 후에 독립적으로 재발견되어 현재는 그들의 이름으로 인용되고 있다. 그 한 예가 일차독립인 벡터는 기저로 확장할 수 있다는 '스타이니츠 교환 정리 (Steinitz Exchange Theorem)'인데 이 정리는 스타이니츠가 소개한 1913년 보다 52년 전에 그라스만이 이미 증명한 내용이다.[9] 그라스만의 연구는 20세기 프랑스의 카르탕(E. Cartan)과 부르바키(Bourbaki) 등에 의하여 재조명되면서 연구가 활발히 이루어져, 현재 대수학에서 다루는 그라스만 대수, 미분기하학에서 다루는 그라스만 다양체 또는 Grassmanian이라는 분야로 발전하였다.

8) 민코프스키(1864-1909)는 1907년 12월 다음과 같이 썼다: "어떤 사람은 케일리의 행렬체계 대신 해밀톤의 사원수체계를 써도 되지 않냐고 제안했지만, 후자는 너무 협소하고 세련되지 않아 우리 연구에는 적당치 않다고 생각한다." Edwin B. Wilson은 Bull. AMS, 21 (1915)에 다음과 같이 썼다: "민코프스키는 상대성이론에 정말 잘 적용되는 수학은 그라스만의 것이라고 생각했다."
9) 이 사실은 폴더(H. G. Forder)가 1941년에 그의 책 'The calculus of extension' 219쪽에서 지적을 하였다.

- 그라스만이 1844년 쓴 ‘lineale Ausdehnungslehre’ 에 대하여 크로우와 사튼(G. Sarton)은 각각 다음과 같이 평가하였다.

“그라스만의 책은 읽기는 어렵지만 수학사상 가장 위대한 고전중의 하나이다. (크로우)”

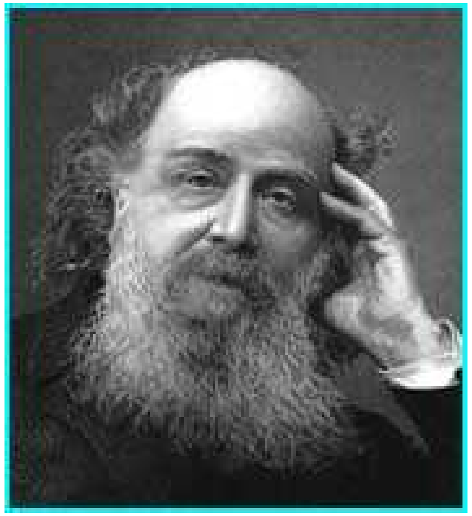
“(그라스만의 책은) 인류 역사상 가장 획기적 업적 중 하나이다. (사튼)”

이외에도, 다른 관점에서 위와 관련된 결과들을 연구하고, 선형대수학 발전에 기여한 수학자로 달랑베르(D'Alembert, 1717-1783), 스텀(J. Sturm, 1803-1855), 야코비(Jacobi, 1804-1851), 바이어슈트라스(Weierstrass, 1815-1897), 크로네커(Kronecker, 1823-1891), W. 조르단(Wilhelm Jordan, 1842-1899) 등을 들 수 있다. 그밖에 C. 조르단(Camille Jordan, 1838-1922)은 1870년에 조르단 표준형에 대한 연구를 발표했으며, 프로베니우스(Frobenius)도 1878년부터 독자적으로 프로베니우스 표준형과 행렬의 계수(rank)와 퇴화차수(nullity)에 관한 주요 부등식을 포함하는 다양한 연구 결과를 발표했다. 특히 프로베니우스는 1896년 케일리-해밀턴 정리의 일반적인 경우에 대해서도 최초로 증명하였다. 이 장에서 보았듯이 선형대수학 이론의 발전은 통일되지 않은 상태로 다양한 경로를 통하여 진행되었기 때문에 역사적으로 보면 선형적으로 발전하지는 않았다. 도

리에(J. L. Dorier, 1995)도 "같은 저자도 방법의 유사성을 인식 못한 채 다른 책에서 같은 아이디어를 (선형대수학 이론의 관점에서 보면) 다른 식으로 서술하였다"고 지적하였다. 이러한 과정을 거쳐 20세기 초에 선형대수학 이론의 공리화가 구체화 된다.

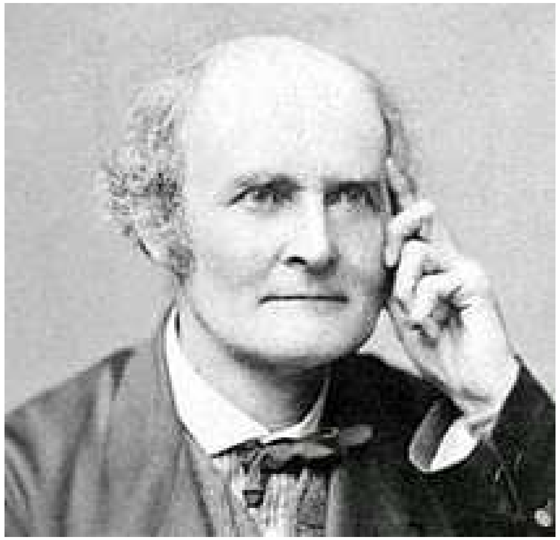
다. 실베스터와 케일리의 행렬 연구

(참고 : 1. 이상구·함윤미 (2006). 실베스터와 클라인 그리고 19세기 미국 수학, 한국수학사학회지, 19(2), 77-88.)



<그림 13 실베스터>

행렬의 개념은 1683년에 행렬식의 개념이 소개된 지 약 150년이 지나서 소개되었다. 원래 '행렬식'이라는 용어를 처음으로 소개한 사람은 가우스였으나 그 개념은 우리가 알고 있는 행렬식과는 다른 것으로 현대적 의미의 '행렬식'이라는 용어는 코시(Cauchy)가 처음으로 사용했다. 코시는 1841년에 행렬



<그림 10> 케일리

식 이론에 관한 최초의 영문 논문을 발표했는데 이 논문에서 그는 두개의 수직선을 양옆에 그려 행렬식을 표기했고($|*|$), 그 표기법이 현재 표준 기호가 되었다. 그때는 현재 우리가 쓰고 있는 편리한 행렬의 표기법을 쓰지 않았기 때문에 널리 이용되지 않고 있다가 실베스터가 1850년에 $\begin{matrix} a_1\alpha_1 \cdots a_1\alpha_n \\ \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ a_n\alpha_1 \cdots a_n\alpha_n \end{matrix}$ 으로 n^2개 계수들의 배열을 나타내고 이것을 행렬(matrix), 즉 $n \times n$(정사각) 행렬이라고 불렀다. 이것이 후에 첨자를 간편하게 섞어 쓰면서 현재 사용하는 행렬의 표기법 $A=[a_{ij}]$로 발전하게 되었다(이상구·강옥기, 1997).

- 실베스터는 'annihilator', '표준형', 'discriminant', 'Hessian', 'Jacobian', '소행렬', 'nullity', 'derogatory(privileged)'의 개념도 정의하였으며, 1880년대에는 행렬방정식 $AX^2+BX+C=O$ ($A, B, C \in \mathbb{C}^{m\times n}$)에 대하여 연구하였다. 그는 또 실베스터 방정식[10] $AX+XB=C$을 연구하였으며 행렬함수 $f(A)$에 대한 정의를 처음으로 주었고, '실베스터의 inertia 법칙'을 발견하였다. 이와 같이 실베스터는 1882년과 1884년 사이에 집중적으로 행렬이론을 연구하였다.

10) http://en.wikipedia.org/wiki/Sylvester_equation

미국 버지니아대 교수직을 사임하고 1851년 영국으로 돌아와 변호사가 된 실베스터는 수학에 관한 깊은 관심을 갖고 있던 변호사 케일리를 만나게 된다. 케일리는 실베스터를 통하여 행렬 개념의 중요성을 인식하고 1853년에 역행렬에 관한 논문을 최초로 발표했다(이상구·함윤미, 2006). 곧 이어 케일리는 1855년에 선형변환을 연구하면서 행렬간의 곱셈을 정의하게 되고 행렬 대수(Matrix Algebra)를 연구하게 되었다. **케일리는 1858년 미국수학회 저널 'Memoir'에서 행렬의 덧셈, 곱셈, 역행렬, 거듭제곱, 영행렬, 항등행렬을 정의하였고 $m \times n$ 행렬 중 $m \leq n$인 행렬은 넓은(broad) 행렬, $m \geq n$인 행렬은 깊은(deep) 행렬이라고 불렀다.** 이후 비로소 (벡터가 아닌) 행렬들의 집합 안에 수학적 구조를 주는 행렬대수가 시작됐다. 따라서 자연스러운 다음 관계로 그간 진행된 행렬식에 관한 연구와 새로 시작된 행렬대수 사이의 관계를 조사하게 되었고, 그래서 나온 **첫 번째 중요한 결과가 행렬식의 곱셈에 관한 성질 즉, $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$이다. 케일리는 이 결과를 보면서 "행렬이론은 그간 150여 년간 그렇게 중요하게 생각하고 많이 연구되어온 행렬식 이론을 크게 압도하게 될 것"이라고 예언**하였고, 실제로 이후의 선형대수학의 연구는 행렬자체의 연구, 선형변환으로서의 행렬연구, 행렬대수(Matrix Algebra)이론 등을 중심으로 재편되었다(이상구·강옥기, 1997).

- 케일리는 특히 행렬대수 연구에 크게 기여했다. 또한 "2차 정사각행렬은 자신의 특

성방정식을 만족한다"는 것을 1858년 증명했으며, 3차 정사각행렬에 관한 연구결과도 확인했다고 주장했다. 흥미있는 것은 본인이 쓴 증명 아래에 “n차 행렬도 자신의 특성방정식을 만족한다는 것도 분명하므로, 지금 완전한 증명을 써내려 가는 노력을 기울여야 할 필요를 느끼지 않는다”라고 써 놓았다. 더 나아가 그는 1857년 다음 정리의 일반적인 증명도 주었다.

If $A, B \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $AB=BA$, and $f(x,y)=\det(xA-yB)$, then $f(B,A)=0$.

‘임의의 행렬이 자신의 특성방정식을 만족한다.'는 정리를 일컬어 ‘케일리-해밀턴 정리’라고 하는 이유는 실제로 해밀턴이 사원수 연구를 하던 중 “4차 정사각행렬은 자신의 특성방정식을 만족한다"는 것을 증명했기 때문이다.

- 케일리는 처음에는 역행렬 표현을 $AB^{-1} \equiv \frac{A\,\rfloor}{\lceil\, B}, \quad B^{-1}A \equiv \frac{\lfloor\, A}{B\,\rceil}$로 소개하였으며, 1860년에 실베스터에게 쓴 편지에서는 $AB^{-1} \equiv \substack{A \\ \sim \\ B}, \quad B^{-1}A \equiv \substack{A \\ \backsim \\ B}$.와 같이 썼다(Higham, 2009). 헨셀(Hensel, 1928)은 AB^{-1}를 표현하기 위하여 A/B와 $B\backslash A$으로 쓰기를 추천하기도 하였다.

그러나 초기 선형대수학의 발전에 크게 기여한 실베스터의 주된 연구는 불변론(invariant theory)이었으며, 통계로만 본다면 실베스터의 주된 연구 분야는 군

론이며, 불변론 분야 연구 결과가 제일 많았다. 수학교수이면서 동시에 변호사 경력을 가진 실베스터와 케일리의 성격은 매우 달랐다.

42세에 캠브리지대 수학과 교수가 된 케일리는 신중했다. 그의 연구결과는 널리 알려졌으며, 영국과 유럽 대륙 다른 학자들의 연구 내용을 잘 숙지하고 있었다. 그러나 27살에 미국 최초의 유태계 수학교수가 되고 버지니아대-보험회사-변호사-육군사관학교-은퇴-존스홉킨스대를 거쳐 68세에 마침내 옥스포드대 수학과 교수가 된 실베스터는 활달하고, 완강하며, 고집이 강하여, 논란에 휘말린 경우가 많았다(Crilly, 2006), (Parshall, 2006), (Sylvester, 1851).

라. 선형대수학의 르네상스 (대한수학회 소식지)

선형연립방정식을 푸는 '반복법(iterative method)'은 1823년 가우스가 자신의 제자인 게르링(C. L. Gerling, 1788-1864)에게 보낸 편지에서 가장 먼저 언급되었다 (Benzi, 2009). 가우스는 '정규방정식(normal equation)'을 이용하여 '최소제곱(least squares) 문제'를 해결하는 방법에서 반복법을 개발하였으며, 1826년 블록 행렬의 경우로 확장하였다. 가우스는 이 방법을 이용하여 당시

미지수가 20~40개인 (diagonally dominant) 선형연립방정식 문제들을 효과적으로 해결하였으며 수렴속도는 매우 빨랐다. 이 방법은 19세기 독일의 측지학자들과 천문학자들이 사용하는 표준이 되었다. 이후 1845년 야코비(C. Jacobi, 1804-1851)가 회전변환을 사용, 계수행렬의 대각원소가 우세하도록 하여 수렴속도가 개선된 반복법을 만들어냈다. 1874년 자이델(P. von Seidel, 1821-1896)은 가우스와 독립적으로 현재 가우스-자이델(Gauss-Seidel) 방법이라 불리는 반복법을 만들어 냈다(Benzi, 2009). 이후 선형연립방정식을 푸는 다양한 반복법이 만들어진다. 이와 같이 행렬이론의 수치해석적인 장점이 부각되면서 응용수학, 수치해석, 수치선형대수학의 발전과 함께 선형대수학의 이론 연구가 활발하게 이루어지고, 그 내용이 교육에도 반영되면서 1920년 경에 선형대수학의 공리화가 완성된 것이다.

케일리의 1855년 예언 이후에 선형대수학의 발전 과정은 크게 두 가지로 나누어 볼 수 있다. 우선 행렬을 유한차원 벡터공간 상의 선형변환으로 여기고 시작한 연구는 선형변환 일반이론의 발전에 힘입어 무한차원에서의 작용소이론(Operator Theory)으로 발전해 가면서 선형대수학은 유한차원인 특수한 경우로 여겨지면서 간과되었다. 다음으로, 행렬을 선형변환으로 생각하는 연구에서는 더욱 일반적인 함수론의 연구에, 또 행렬 자체에 대한 연구에서는 특별한 경우인 벡터의 연구에 집중된다. 선형대수학 자체의 중요성을 한 동안 대부분의 수학자들이 간과하고 있었던 것이다. 19세기까지의 선형대수학 연구결과들은 이들을 개선 발전시킨 연구와 그 결과들을 잘 정리한 강의록과 교재들이 바이어슈트라스(1903), 크로네커(1903), 보커(Bocher, 1907), 턴불(Turnbull)과 에잇킨(Aitken)(1930s) 등에 의하여 발간되면서 널리 퍼진다.

1938년 행렬을 응용수학의 한 분야로 다룬 최초의 책 <행렬: 역학과 미분방정식에의 응용>은 영국 국립물리연구소(NPL)에서 프레이저(Frazer), 던컨(Duncan)과 칼라(Collar)가 발간하였다. 이 책은 행렬함수 e^A 연구의 중요성을 강조하였다(Frazer et al, 1938). 이는 연속함수를 다항식으로 바꾸어 생각하는 테일러 전개의 모든 과정을 행렬함수로 확장할 수 있다는 발견이다. 또 대부분의 상미분 방정식 문제를 행렬문제, 즉 선형연립방정식문제로 바꾸어 해결할 수 있다는 의미이기도 하다. 즉, 주어진 수학적 문제를 해결할 때, 먼저 그 문제를 수식화(Modeling)하고 선형화한 후 선형연립방정식으로 바꾸어 놓고 나면 나머지는 행렬에 대한 지식을 이용하여 답을 구할 수 있다. 즉, 행렬과 그를 연구하는 선형대수학은 수학적 이론으로부터 우리가 기대하는 그 모델, 즉 “왜 수학을 공부해야 하는가?”하는 문제에 대한 자연스러운 답을 준다는 것을 인식하게 된 것이다.

- 이런 이유로 "행렬이론의 내용은 우리 주위 문제를 해결하는 데 쓸 수 있으므로 연구할 가치가 충분히 있다"는 분위기가 수학계를 자극하였다. 단지 크기가 큰 것, 즉 계산이 많고 손으로 풀기 어려운 것만이 문제가 되는데 이 부분이 20세기 후반 컴퓨터의 발전과 함께 자연스럽게 해결된 것이다. **2차 세계대전의 승패를 가른 한 요인이 된 선형계획법 (LP: Linear Programming)은 선형대수(행렬)이론과 대용량 계산을 기반으로 한다.** 2차 세계대전이 끝나자 전쟁을 승리로 이끈 행렬과 행렬의 수치적 처리에 대한 관심이 극대화 된다. 1947년 폰 노이만(von Neumann)과 골드스타인(Goldstine)이 컴퓨터의 계산상의 오차(round-off errors)를 분석하는 조건수(condition numbers) 개념을 공개한다. 프로그램을 내장한(stored-program) 디지털 컴퓨터를 각각 처음으로 소개하고 또 처음으로 만들어 낸 튜링(Alan Turing)과 폰 노이만은 20세기의 거인으로 자리한다. **튜링이 1948년에 소개한 LU-분해와 10년 후에, 주어진 행렬을 그와 닮음인 블록 대각 행렬로 수렴시키는 QR-분해를 이용한 QR-알고리즘**을 윌킨슨(Wilkinson)와 하우스홀더(Householder) 등의 기여로 개발되어 다양한 컴퓨터 알고리즘 개발에 이용되었다. 이러한 행렬분해 이론은 그후 **'Cholesky 분해', 'Polar 분해', '특이값분해(Singular Value Decomposition)'** 등으로 다양한 연구의 한 분야로 발전하였다. 따라서 선형대수학의 '르네상스'와 디지털 컴퓨터의 발달은 불가분의 관계에 있다. 실제로, 20세기 후반에 크게 발전한 행렬이론의 지식은 선형계획법, 비선형계획법, 'Markov Chain', 암호이론, 인구문제, 교통문제, 최적화이론, 수치해석학등의 다양한 연구분야

를 개척하고 발전시키는데 결정적인 기여를 한 것이다. 이 과정에서 선형성에 근거한 컴퓨터는 진화하였으며 그러한 컴퓨터의 발전과 더불어 선형대수학을 포함한 선형대수학의 연구와 이용이 20세기 후반에 가히 폭발적으로 활발해졌다. 사실 수학은 고대, 중세, 근세, 현대의 어떤 시기에도 각각 그 당시의 여러 사회문제를 해결 해 주거나, 해결할 수 있는 방법을 제시하면서 중요한 위치를 점유해 왔다. 또, 지금도 수학은 그 역할을 성실히 수행 하고 있다는 것이다. 즉, 오늘날도 순수 수학자들이 개발한 행렬이론의 지식이 현대 사회의 여러 문제를 해결하는 역할을 맡아오고 있다.

<그림 11> 검색과 구글 행렬

1976년 공개키 코드(public key code)라는 개념으로 암호론에 소개된 새로운 아이디어인 RSA 코드 해결의 실마리도 (0,1)-행렬과 ‘구조화된 가우스 소거법(Structured Gaussian elimination)[11]’이라고 알려진 선형대수학의 기법과 슈퍼컴퓨터를 이용하여 렌스트라(Arjen Lenstra)에 의해 1994년 4월 마무리 지어졌다. 구글(Google)의 페이지랭크(PageRank) 알고리즘은 구글행렬(Google matrix)을 이용하여 얻어진다.[12] 검색결과를 나열하는 순서는 거듭제곱법(power method)을 구글행렬에 적용하여 가장 큰 고유값과 그에 대응하는 고유벡터를 찾는 과정

11) 가우스 소거법을 하는 동안에 오차에 의해 생겨날 수 있는 ‘fill-in’을 최소화하는 수치해석의 한 기법으로 정수의 소인수 분해에서 일어나는 행렬의 특수한 구조의 이점을 충분히 활용한다. http://www.farcaster.com/papers/crypto-solve/node5.html
12) http://www.mathnet.or.kr/new_sub04/sub04_10_read.php?no=58&page=1, 이상구, 선형대수학과 구글(Google) 검색엔진, 대한수학회 소식지, 139호, 2011년.

을 통하여 얻어지는 것이다. 아도비 시스템(adobe.com)이 1985년에 개발한 'PostScript' 언어 'PostScript font'의 특징은 프린트 될 페이지에 맞추어 회전하거나 평행이동하여, 초상화 형태나 풍경화 형태로 바꾸어 주거나, 글과 그림의 위치를 조정하여 가운데로 오게 하는 기능도 갖는다. 이와 같이 크기와 모양은 글꼴의 외곽선 처리방식에서 행렬을 이용한 선형변환을 통하여 글자의 형태를 최대한 보전하는 선형대수학 방법에 의해 표현하는 것이다. 또한 작용소이론, 즉 함수해석학, 그 중에서도 힐베르트(Hilbert) 공간이론과 푸리에(Fourier) 해석학 등은 선형대수학의 일부로 여겨질 수 있다.

20세기 후반에는 수천 년의 선형대수학 지식의 주요내용들을 요약 정리하여 효과적으로 담은 머스키(Mirsky, 1955), 간트마허(Gantmacher, 1959), 마르쿠스와 민쓰(Marcus & Minc, 1964), 혼과 존스(Horn & Johnson, 1990)등이 쓴 책들이 널리 퍼지면서 현대선형대수학 책들의 고전이 된다. 인터넷의 발전과 함께 선형대수학의 이론 연구가 활발하게 이루어지고, 좋은 선형대수학 입문서들이 발간되면서 연구 내용이 교육에 크게 반영되었다. 이런 교재들을 통하여 자연-공학-사회계열 대학생들에게 학습된 20세기 행렬이론의 지식은 선형계획법, 비선형계획법, 마코프 연쇄(Markov Chain), 암호이론, 인구문제, 교통문제, 최적화이론, 수치해석학, 수치선형대수학, 조합적 행렬론, 이산수학, 계산수학이라는 다양한 연구 분야를 개척하고 발전시키는데 큰 기여를 한다. 이 과정을 통하여 선형대수학은 대학에서 배워야할 필수 수학과목의 하나로 자리 잡게 되었다(Dorier, 1995). 그리고 1990년부터는 미분적분학 개혁(Reform)에 이어 21세기에 부응하는 선형대수학 개혁(Reform)에 대한 진지한 연구가 시작되었다(Carlson et al, 1993). 그 연구 결과들과 기술의 발전이 조화를 이루며 21세기 대학수학교육의 변화를 주도하고 있다.[13)]

4. 결론

- 본 연구에서는 고대 동양의 기여에 보태서 근대 선형대수학의 발전 과정에서 가장 큰 기여를 한 그라스만이 저술한 책의 내용과 그에 대한 평가를 발굴하여 그간 간과 되었던 그라스만의 역할을 상세히 다루었다. 당시까지의 선형대수학과 관련된 거의 모든 주요 내용을 분명하게 이해하고 자신의 내용을 추가하며 1844년 선형대수학 책 2판을 발간한 그라스만의 업적은 시간이 흘러 19세기 말부터 항켈, 클라인, 화이트헤드, 와일과 같은 수학자들에 의하여 인정을 받게 된다. 특히 부르바키 등에 의하여 그라스만의 연구 결과가 재조명되면서 그간의 다양한 연구가 구체적인 수학분야로 체계를 갖춘다. 본 연구에서는 역사적으로 그라스만 이후 선형대수학 이론의 발전은 한 방향이 아니라 여러 분야의 수학전공자들에 의하여 비선형적으로 발전하였음도 확인 하였다. 19세기 중반에 행렬을 정의한 실베스터는 행렬이론과 불변론에, 케일리는 행렬대수 연구에 결정적인 역할을 하였다. 그리고 19세기 후반에 페아노는 벡터공간의 정의를 제시하였으며, 스텀, 달랑베르, 야코비, 크로네커, 바이어슈트라스 등의 기여에 힘입어 1920년대 말이 되면서 선형대수학에 대한 대부분의 공리화가 완성되었다. 그리고 이런 성과들을 잘 정리한 많은 선형대수학 교재들이 반데르발덴(Van der Warden), 간트마허, 마르쿠스와 민쓰, 혼과 존슨 등에 의하여 출판되었다. 이런 양질의 현대선형대수학 교재들과 이를 쉽게 정리한 훌륭한 선형대수학 입문서들은 추상적인 고등수학을 모든 대학생이 접할 수 있도록 해 주었다. 이런 과정을 통하여 선형대수학은 우리가 배운 수학을 해석학, 대수학, 기하학, 수치해석학, 응용수학 등 다양한 이질적인 수학 분야는 물론 공학과 사회과학 까지 연결시켜주는 가교역할을 충실히 하면서 디지털 컴퓨터의 발달과 함께 대학에서 배워야 할 필수 과목의 하나로 자리 잡게 된 것이다.

13) http://faculty.pepperdine.edu/dstrong/LinearAlgebra/2011/index.html

감사합니다 !