201( ) 학년도 학기 기말 출석시험 시험문제(답안)지 Sample						감독자 확인
과목명	Linear Algebra with Sage 선형대수학 with Sage	학수번호-분반		담당교수	이 상 구	
계열 · 대학(학부)		학과(전공)		학년		
		학번		이름		

※ 수험생 유의사항

1. 답안 작성전에 반드시 계열·대학(학부), 학과(전공), 학년, 학번, 이름 등을 빠짐없이 기입하고 감독자의 날인을 받아야 합니다.
2. 시험 부정행위시 ...
3. 답안을 모두 작성한 경우에도 감독위원의 지시가 있기 전에는 고사장 밖으로 나갈 수 없으며, 감독위원의 퇴실 지시가 있으면 반드시 답안지를 감독위원께 제출한 후에 퇴실하시기 바랍니다.
4. 문제풀이시 아래의 Sage명령어를 이용하여 답을 구하는 과정을 서술하셔도 됩니다.

성 적

<Sage Linear Algebra 입문 명령어 일부>			
var('a,b,c,d')	# 변수정의	A.rank( )	# Rank
eq1=3*a+3*b==12	# equation1 정의	A.right_nullity( )	# Nullity
eq2=5*a+2*b==13	# equation2 정의	A.solve_right(B)	# AX=B 의 해
solve([eq1, eq2], a,b)	# Solve 연립방정식	A.dimension( )	# 차원
v=vector([3, 1, 2])	# 벡터정의	A.basis( )	# 기저
A=matrix(QQ, 3, 3, [3, 0, 0, 0, 0, 2, 0, 3, 4]);	# 행렬정의	J,P=A.jordan_form(transformation=True)	# JCF
A.rref( )	# RREF	Q,R=A.QR( )	# QR분해
A.inverse( )	# 역행렬	A.SVD( )	# SVD
A.det( )	# 행렬식	plot(x^3-x, (x, -pi, pi))	# 2차원 함수 Plot
A.adjoint( )	# adjoint matrix	implicit_plot(x^2+y^2, (x, -3, 3), (y, -3, 3))	# 2차원 음함수 Plot
A.eigenvalues( )	# 고유값	var('t')	# 변수정의 (매개변수방정식)
A.eigenvectors_right( )	# 고유벡터	x=2+2*t	
A.fcp( )	# 특성다항식	y=-3*t-2	
P,L,U=A.LU( )	# LU분해 (P: Permutation행렬 / L,U:삼각행렬)	parametric_plot((x,y), (t, -10, 10), rgbcolor='red')	# 직선 Plot

I. (2점 x 13 = 26점) 맞으면(T) or 틀리면(F) 표 하시오.

(T) 1. $\in M_{\times n}\ C)$ 에 대하여, rank$(AA\ )$=rank(A)=rank(A^TA) 이다.

(T) 2. $A\in M_n(R)$에 대하여, A가 직교대각화 가능하다. A는 대칭행렬이다.

(F) 3. $A\in M_n(C)$ 에 대하여 $A-A^*$는 Hermitian 행렬이다.

(F) 4. R^n 의 벡터 $\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2,\ \ ,\mathrm{x}_k$에 대하여 $S=\ \mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2,\ldots,\mathrm{x}_k\}$ 일 때, S : 직교집합 $\mathrm{x}_i\ \ \mathrm{x}_j = \begin{matrix} 0 & (i\ \ j) \\ 1 & (i=j)\end{matrix}$.

(F) 5. 점 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 와 평면 π : $ax+by+cz=d$ 사이의 거리는 $D=\dfrac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{a^2+b^2+c^2}$ 이다.

(F) 6. 선형변환 T : $R^n\ \ R^m$ 가 단사일 필요충분조건은 $\ker T=0$ 이다.

(F) 7. 임의의 행렬 $A\in M_{m\times n}$에 대하여 $\mathrm{rank}(A)+\mathrm{nullity}(A)=m$ 이 성립한다.

(T) 8. 연립방정식 $A\mathrm{x}=\mathrm{b}$가 해를 가질(consistent) 필요충분조건은 $\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}[A\ \ \mathrm{b}]$ 이다.

(F) 9. a 를 R^n 상의 아닌 열벡터라고 하자. 그러면 선형변환 $T(\mathrm{x})=\mathrm{proj}_{<\mathrm{a}}\ \mathrm{x}=P\mathrm{x}$ 인 표준행렬 P는 $\dfrac{1}{\mathrm{a}\mathrm{a}^T}\mathrm{a}^T\mathrm{a}$ 이다.

(이 때, P 는 대칭행렬이며 $\mathrm{rank}(P)=1$ 이다.)

(F) 10. n차의 정사각행렬 A가 대각화 가능할 필요충분조건은 A가 n개의 일차종속인 고유벡터를 갖는 것이다.

(F) 11. A 가 대칭행렬이면, A 의 서로 같은 고유값에 대응하는 고유벡터는 서로 직교한다.

(T) 12. [Schur 정리] 임의의 n차 정사각행렬은 자신의 고유값을 대각선성분으로 갖는 상삼각행렬과 유니타리 닮음이다.

즉, $U^*AU=T=[t_{ij}]\in M_n(C)$, $t_{ij}=0$ ($i>j$). (t_{ii} : A 의 고유값, U : 유니타리 행렬)

(F) 13. Any minimal linear independent set in C^n form a basis for C^n?

II. (3점x10=30점) State or Fill the blank(s).

1. [2-step부분공간 test] $W\ \ _sV$ (i) $\boxed{\mathrm{u}+\mathrm{v}\in W}$ (ii) $\boxed{\alpha\mathrm{u}\in W}$ $\mathrm{u},\ \mathrm{v}\in W,\alpha\in C$

2. **[Vector 공간의 기저 (basis)]** 벡터공간 V 의 basis

$\Leftrightarrow\ i)\ \boxed{B \text{ 가 일차독립}}\qquad (ii)\ \boxed{<B>\ =\ B\text{의 span}\ \ V}$

3. **[Vector 공간의 차원 (dimension)]** V의 dimension $=$ $\boxed{|B|\ ,B : \text{a basis for 벡터공간 } V}$

4. **[Hyperplane]** $\mathbf{a}\in R$ 의 영 아닌 벡터라 하자. $\mathbf{a}\ =\ \mathbf{x}\in R^n \mid \boxed{\mathbf{a}\quad \mathbf{x}=0}\ \}$ 을 Hyperplane이라 한다.

그리고 $\mathbf{a}$ 은 R^n 의 부분공간이고 $\dim \mathbf{a}\ = \boxed{n-1}$ 이다.

5. **[닮은(similar)행렬]** 정사각행렬 A,B 에 대하여 $B=\boxed{P^{-1}AP}$ 을 만족하는 가역행렬 P가 존재할 때 B는 A와 닮은(similar) 행렬이라고 한다. (이 때, $B\quad A$ 라 쓴다.)

6. **[Hermitian 내적]** 복소벡터공간 V 의 임의의 벡터 u v,w 와 스칼라 $c\ \in C$ 에 대하여 다음 조건을 만족하는 $V\times V$ 에서 C 로의 함수 $<\ ,\ >$를 V 의 Hermitian 내적이라 한다.

$(i)\quad <\mathrm{u},\mathrm{v}>\ = \boxed{<\mathrm{v},\mathrm{u}>}$

$(ii)\ <\mathrm{u}+\mathrm{v},\ \mathrm{w}>\ =<\mathrm{u},\ \mathrm{w}>+<\mathrm{v},\ \mathrm{w}>$

$(iii)\ <c\mathrm{u},\ \mathrm{v}>\ =c<\mathrm{u},\mathrm{v}>$

$(iv)\ <\mathrm{v},\mathrm{v}>\quad 0,$ 특히 $<\mathrm{v},\mathrm{v}>=0\qquad \mathrm{v}=0$

7. **[정규행렬(normal matrix)]** 행렬 $A\in M_n(C)$가 $\boxed{AA^*=A^*A}$ 을 만족하면 A를 정규행렬(normal matrix)이라고 한다.

8. **[핵(kernel), 치역(range)]** 선형변환 $T\ :\ V\qquad W$ 에 대하여 $\ker T=\{\boxed{\mathrm{v}\in V|\ \ T(\mathrm{v})=0}\},\ \mathrm{Im}\,T=\{\boxed{T(\mathrm{v})\in W|\ \ \mathrm{v}\in V}\}$를 각각 T의 핵(kernel), 치역(range) 이라 한다.

9. **[Gram-Schmidt 정규직교화] Gram-Schmidt 정규직교화 과정**(orthonomalization process)을 설명하여라.

먼저 R^n 의 기저 S 로부터 직교집합 $T=\ \mathrm{y}_1,\mathrm{y}_2,\ldots,\mathrm{y}_n\}$ 을 다음과 같은 단계로 계산한다.

단계 1 : $\mathrm{y}_1=\mathrm{x}_1$이라 한다.

단계 2 : y_1 에 의하여 생성되는 부분공간을 W_1 이라 하고 $\mathrm{y}_2=\mathrm{x}_2-\mathrm{proj}\quad \mathrm{x}_2=\mathrm{x}_2-\dfrac{\mathrm{x}_2\quad \mathrm{y}_1}{\|\mathrm{y}_1\|^2}\mathrm{y}_1$ 로 한다.

단계 3 : $\mathrm{y}_1,\ \mathrm{y}_2$에 의하여 생성되는 부분공간을 W_2 라 하고 $\mathrm{y}_3=\mathrm{x}_3-\mathrm{proj}_{W_2}\mathrm{x}_3=\mathrm{x}_3-\dfrac{\mathrm{x}_3\quad \mathrm{y}_1}{\|\mathrm{y}_1\|^2}\mathrm{y}_1-\dfrac{\mathrm{x}_3\quad \mathrm{y}_2}{\|\mathrm{y}_2\|^2}\mathrm{y}_2$ 로 한다.

단계 4에서부터 n 까지는 마찬가지 방법으로 $\mathrm{y}_k=\mathrm{x}_k-\mathrm{proj}_{W_{k-1}}\mathrm{x}_k=\mathrm{x}_k-\dfrac{\mathrm{x}_k\quad \mathrm{y}_1}{\|\mathrm{z}_1\|^2}\mathrm{y}_1-\dfrac{\mathrm{x}_k\quad \mathrm{y}_2}{\|\mathrm{y}_2\|^2}\mathrm{y}_2-\quad-\dfrac{\mathrm{x}_k\quad \mathrm{y}_{k-1}}{\|\mathrm{y}_{k-1}\|^2}\mathrm{y}_{k-1}\quad (k=4,5,\ldots,n)$

위의 단계로부터 얻어지는 $T=\{\mathrm{y}_1,\mathrm{y}_2,\ldots,\mathrm{y}_n\}$ 은 서로 수직인 직교집합이고, 각각의 크기를 1로 하면 즉,

$\mathrm{z}_k=\dfrac{\mathrm{y}_k}{\|\mathrm{y}_k\|}\quad (k=1,2,\ldots,n)$ 라 정의하면 집합 $\{\mathrm{z}_1,\mathrm{z}_2,\ldots,\mathrm{z}_n\}$ 은 R^n 의 정규직교기저이다. ■

10. n차의 정사각행렬 A가 $t\ (1\quad t\quad n)$ 개의 일차독립인 고유벡터를 가지면, A는 다음과 같은 행렬 J_A와 (유니타리) 닮음이다.

$$J_A\ =\begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & J_2 & \\ & & \\ 0 & & J_t \end{pmatrix}_{n\times n}$$

즉, $U^*AU=J_A$ 인 유니타리 행렬 U 가 존재한다. 여기서,

$$J_k=\begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 \\ & & 1 \\ 0 & & \lambda_i \end{pmatrix}_{n_k\times n_k}\quad ,\quad (n_1+n_2+\quad +n_t\ =n,\ 1\quad k\quad t\ )\text{ 이다.}$$

이 때 J_k 를 A 의 고유값 λ_i 에 대응하는 하나의 $\boxed{\text{Jordan block}}$이라 하고, J_A를 A의 $\boxed{\text{Jordan 표준형(Jordan canonical form)}}$이라 한다.

III. (4점x11=44점) Explain or Find.

1. 행렬 $A=\begin{bmatrix} 0&1&2&3\\ 1&2&3&4\\ 2&3&4&5\\ 3&4&5&6 \end{bmatrix}$와 벡터 $\mathrm{b}=\begin{bmatrix} -1\\ 0\\ 1\\ 2 \end{bmatrix}$에 대하여 다음 물음에 답하여라. **(답을 구할 수 있는 Sage 명령어만 쓰면 됩니다.)**

(a) Sage를 이용하여 행렬 A의 Determinant를 구하여라.

Sol)
```
A=matrix(4,4,[0,1,2,3,1,2,3,4,2,3,4,5,3,4,5,6])
A.det()
```

(b) Sage를 이용하여 행렬 의 고유값과 고유벡터를 구하여라.

Sol)
```
A=matrix(4,4,[0,1,2,3,1,2,3,4,2,3,4,5,3,4,5,6])
A.eigenvectors_right()
```

(c) Sage를 이용하여 행렬 $A\mathrm{x}$ b 의 해를 구하여라.

Sol)
```
A=matrix(4,4,[0,1,2,3,1,2,3,4,2,3,4,5,3,4,5,6])
b=vector([-1,0,1,2])
A.solve_right(b)
```

(d) Sage를 이용하여 행렬 A의 Jordan Canonical Form을 구하여라.

Sol)
```
A=matrix(4,4,[0,1,2,3,1,2,3,4,2,3,4,5,3,4,5,6])
J,P=A.jordan_form(transformation=True)
J
```
■

2. 다음 행렬 A의 rank와 nullity를 구하여라.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathrm{RREF}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sol)

행렬 A의 rank와 nullity를 구하기 위한 Sage 명령어를 적으세요.
```
A=matrix(5,4,[1,1,2,1,1,0,-3,1,1,0,0,1,0,1,1,2,0,0,1,1])
A.rank()
A.right_nullity()
```

Rank : 4 , Nullity : 0 ■

3. 선형변환 $T: R \quad R^3$가 $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x-2y \\ 5x-y \\ 2x+3y \end{bmatrix}$로 정의되고, $\alpha = \mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2\}$, $\beta = \{\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2, \mathrm{u}_3\}$가 각각, R^2, R^3의 순서기저로,

$\mathrm{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathrm{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathrm{u}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathrm{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathrm{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$일 때, 기저 α, β 에 대한 T 의 변환행렬 $[T]_\alpha^\beta$를 구하여라.

Sol) $T(\mathrm{v}_2) = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $T(\mathrm{v}_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$이다, 그리고 $[T(\mathrm{v}_2)]_\beta$, $[T(\mathrm{v}_1)]_\beta$를 구하기 위하여

Sage를 이용하여 첨가행렬 $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & : & -2 & : & 1 \\ 0 & 1 & 0 & : & -1 & : & 5 \\ 1 & 0 & 0 & : & 3 & : & 2 \end{bmatrix}$의 RREF를 구하면 다음과 같다.

아래 결과와 같이 행렬 A의 RREF를 구하기 위한 Sage 명령어를 적으세요.
```
A=matrix(3,5,[0,0,1,-2,1,0,1,0,-1,5,1,0,0,3,2])
A.rref()
```
```
[ 1  0  0  3  2]
[ 0  1  0 -1  5]
[ 0  0  1 -2  1]
```

따라서, $[T]_\alpha^\beta = [\boxed{[T(\mathrm{v}_1)]_\beta} : \boxed{[T(\mathrm{v}_2)]_\beta}] = \left[\boxed{\begin{matrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \\ 1 & -2 \end{matrix}}\right]$ 이다. ■

4. Sage를 이용하여 행렬 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$의 특성방정식을 구하고, 이를 이용하여 각 고유값에 대한 대수적 중복도를 구하여라.

Sol)

아래 결과와 같이 행렬 A의 특성방정식을 구하기 위한 Sage 명령어를 적으세요.
A=matrix(ZZ,[[1,0,-1],[0,1,2],[2,1,2]]) A.fcp()
(x - 2) * (x - 1)^2

따라서, 각 고유값에 대한 대수적 중복도는 $\lambda=2$일 때 1, $\lambda=1$일 때 2 이다. ■

5. 행렬 $A=\begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ 의 일차독립인 고유벡터들의 집합 $S=\ (2,1),(1,-2)\}$ 가 주어진 경우 를 직교대각화하는 직교행렬 P 와 $P\ AP=D$ 인 대각행렬 D 를 구하여라.

Sol)

아래 결과와 같이 행렬 A의 고유값과 고유벡터를 구하기 위한 Sage 명령어를 적으세요.
A=matrix(2,2,[7,2,2,4]) A.eigenvectors_right( )
[(8, [(2, 1)], 1), (3, [(1, -2)], 1)]

따라서, 행렬 A를 직교대각화하는 직교행렬 $P=\begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$이고, $D=\begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ 이다. ■

6. 행렬 $A\ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 를 이용하여 e^A를 구하여라.

Sol) 먼저 행렬 A를 대각화 하기 위해 Sage를 이용하여 A의 고유값과 그에 대응하는 고유벡터를 구하면 다음과 같다.

아래 결과와 같이 행렬 A의 고유값과 고유벡터를 구하기 위한 Sage 명령어를 적으세요.
A=matrix(2,2,[1,1,0,0]) A.eigenvectors_right( )
[(0, [(1, -1)], 1), (1, [(1, 0)], 1)]

따라서 $A=PDP\ ^1=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$이고, e 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$e^A=e^{PDP\ ^1}=Pe^DP^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} e & e-1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ■

7. 이차형식 $q(x,y)=23x\ -50xy+61y^2$ 에 대한 대칭행렬 A를 구하여라.

Sol)

$\mathrm{ax^2+2bxy+cy^2} = [\mathrm{x\ y}]\begin{bmatrix} \mathrm{a} & \mathrm{b} \\ \mathrm{b} & \mathrm{c} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathrm{x} \\ \mathrm{y} \end{bmatrix}$ 이므로

$\mathrm{23x^2-50xy+61y^2} = [\mathrm{x\ y}]\begin{bmatrix} 23 & -25 \\ -25 & 61 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathrm{x} \\ \mathrm{y} \end{bmatrix}$ $(\mathrm{a}=23,\ \mathrm{b}=-25,\ \mathrm{c}=61)$

위의 $\mathrm{x^T}A\mathrm{x}$ 꼴에서 구하고자 하는 대칭행렬 A는,

$A=\begin{bmatrix} 23 & -25 \\ -25 & 61 \end{bmatrix}$ ■

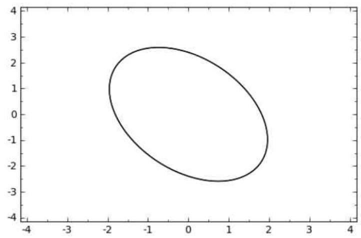
8. 변환 $\quad x,y,z,w) = (x-y, y-z, z-w, w-x)$ 의 표준행렬을 구하여라.
Sol)

$$T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ■$$

9. Sage를 이용하여 이차형식 $7x \ + 4xy + 4y^2 - 23 = 0$ 의 그래프의 개형을 그려라. **(답을 구할 수 있는 Sage 명령어만 쓰면 됩니다.)**

Sol)

```
var('x y')
f = 7*x^2 + 4*x*y + 4*y^2-23
implicit_plot(f, (x, -4, 4), (y, -4,4))
```



10. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ 행렬이 대각화 불가능한 이유를 설명하여라.

Sol)

고유값을 구해보면

$$|\lambda I_2 - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 \\ -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2 = 0$$

$$\lambda = 1 \,(\text{ 수적중복도} 2)$$

그러나 고유벡터를 구해보면

$\lambda = 1$일 때, $(I_2 - A)$x$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0,\quad$ x$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

이므로 기하적중복도는 1임을 알 수 있다.
2차정사각행렬이 대각화 가능하기 위해서는 모든 고유값에 대하여
기하적중복도 = 대수적중복도 이어야 한다. 그런데 만족하지 못하였으므로 대각화 불가능하다. ■

11. 행렬 $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$의 일반화된 고유벡터를 구하는 과정을 설명하여라. (단, 행렬 A의 Jordan Canonical Form은 $J = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$)

Sol)

만일 Jordan 표준형으로 행렬을 표현할 수 있다면, $^{1}AQ \quad J \qquad AQ = JQ$ 이다.

만일 행렬 Q의 열벡터 $q_j = Q^{(j)}$라고 하면 $Aq_j = \lambda_j q_j + \delta_j q_{j-1}$,

단 δ_j는 행렬 의 첫 번째 열이 Jordan block의 첫 번째 열이면 0이고, 아니라면 1이다. 따라서 $(A - \lambda_j I)q_j = \delta_j q_{j-1}$이다.

즉 $\delta_j = 0$이면 q_j는 행렬 A의 고유값 λ에 대응하는 고유벡터이고, $\delta_j = 1$이라면 $(A - \lambda_j I)q_j = q_{j-1}$ 이다.

행렬 A의 고유값은 $\lambda = 4$ 이고 대수적 중복도는 3이다.

$A\,\mathrm{q} = 4\mathrm{q}_1, \quad A\,\mathrm{q} = 4\mathrm{q}_2 + \mathrm{q}_1, \quad A\,\mathrm{q}_3 = 4\mathrm{q}_3 + \mathrm{q}_2$

$(A - 4I)\mathrm{q}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = 0 \qquad x_1 = a, \quad y_1 = 0, \quad z_1 = 0 \qquad \mathrm{q}_1 = (1,0,0)$

$(A - iI)\mathrm{q}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad x_2 = b, \quad y_2 = 2, \quad z_2 = 0 \qquad \mathrm{q}_2 = (1,1,0)$

$(A - iI)\mathrm{q}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad x_3 = c, \quad y_3 = 0, \quad z_3 = 1 \qquad \mathrm{q}_3 = (0,0,1)$

$Q = [\mathrm{q}\ \mathrm{q}_2 \mathrm{q}_3] = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Q^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ■

(Bonus) Linear Algebra with Sage 강의에서 새롭게 배운 내용, 향상된 능력, 그 동안에 수업에 대하여 느낀 내용 및 건의나 담당 교수에게 하고 싶은 말을 자유롭게 기술하십시오.