




2016 KSME

International Conference on Mathematics Education

2016. 10. 14~16, *Ajou University*

**빅데이터 시대의 대학 수학교육:  
대학수학교육과 CT (코딩 교육)**

**이상구\*(성균관대)**  
sglee@skku.edu with 이재와 (안림대)

2016년 10월 15일 (토) 10:00~10:50  
OP5 원천관 242호, 아주대학교



## Abstract :

### 4차 산업혁명 - 빅데이터 시대의 대학 수학교육

1. 본 연구에서는 기존과 같이 대학에서 수학을 가르치면서 자연스럽게 '컴퓨팅 사고력(Computational Thinking, CT)' 을 향상시키는 방법에 대하여 소개한다.
2. 본 연구진이 개발한 고교 미적, 고교 통계, 대학 미적분학, 선형대수학, 미분방정식, 통계학, 공학수학 ... 의 콘텐츠와 수학 실습실을 소개한다.
3. 교수자 및 학습자의 거의 부담 없이 대학에서 수학을 배운 학생들이 기업 또는 초-중등교육 현장에서 활동 할 때 자연스럽게 수학적 지식에 기반한 '컴퓨팅 사고력(Computational Thinking, CT)' 및 코딩 능력을 발휘할 수 있도록 해 준다.

## References

- 이상구 · 신준국 · 김경원 (2014). *스토리텔링 수학 교과서에서 공학적 도구의 활용과 미분적분학 단원에 관한 개발 사례*, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집>, 28(1), 65-79.
- 이상구 · 장지은 · 김경원 (2013). *Sage와 GeoGebra를 이용한 선형대수학 개념의 Visual-Dynamic 자료 개발과 활용*, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집>, 27(1), 1-17.
- 이상구 · 장지은 · 김경원 · 박경은 (2014). *GeoGebra와 미분적분학 개념의 시각화*, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집>, 28(4), 457-474.
- 이상구 · 이금희 · 최용석 · 이재화 · 이지영 (2015). *R을 활용한 '대화형 통계학 입문 실습실' 개발과 활용*, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집>, 29(4), 573-588.
- 이상구 · 이재화 · 박준현 · 김응기 (2016). *SageMath를 활용한 '대화형 공학수학 실습실'의 개발과 활용*, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집>, 30(3), 281-294.
- 박경은 · 이상구 (2015). *'컴퓨팅 사고력(Computational thinking)' 향상과 Sage 도구를 이용한 수학교육*, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집>, 29(1), 19-33.
- 한국과학창의재단 (2013). *초·중등 단계 Computational Thinking 도입을 위한 기초연구*, 공고 제2013-087호.

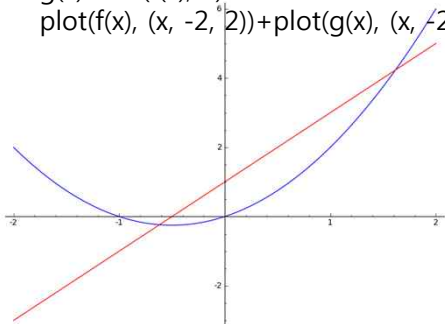
## Contents :

1. 중등수학 (미적-통계)
2. 미분적분학 1, 2(다변수 미적)
3. 선형대수학
4. 통계학
5. 미분방정식, 복소함수론, 공학수학 ...
6. Math for 빅데이터

## 중등수학 - 미적, 통계 ...

$f(x)=x^2+x$   
 $g(x)=\text{diff}(f(x), x)$   
 $\text{plot}(f(x), (x, -2, 2))+\text{plot}(g(x), (x, -2, 2), \text{color}='red')$

$f(x)$ 와 도함수의 그래프 같이 그리기



(2014). 스토리텔링 수학 교과서에서 공학적 도구의 활용과 미분적분학 단원에 관한 개발 사례, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집>, 28(1), 65-79.

- <http://matrix.skku.ac.kr/sage-story/sage-2-2.html>
- <http://matrix.skku.ac.kr/sage-story/sage-2-4.html>
- <http://matrix.skku.ac.kr/sage-story/sage-3-1.html>
- <http://matrix.skku.ac.kr/sage-story/sage-4-1.html>
- <http://matrix.skku.ac.kr/sage-story/sage-e-1.html>

## 미적분학

(크롬 브라우저 이용 권장)

[Lab] (python - Sage) <http://matrix.skku.ac.kr/Cal-Book/index.html>

<http://ibook.skku.edu/Viewer/Calculus2>

<http://matrix.skku.ac.kr/Cal-Book/part2/CS-Sec-14-3-Sol.htm>

CONTENTS  
Part I Single Variable Calculus

### Chapter 1. Functions

- 1.1 Functions and Graph [Solution](#)
- [Symmetry](#) [Solution](#)
- [Common Functions](#) [Solution](#)
- [Translation, Stretching and Rotation of Functions](#) [Solution](#)

### Chapter 2. Limits and Continuity

[Limits of functions](#)

### Chapter 3. Derivatives

- 3.1 Definition of Derivatives, Differentiation
- 3.2 Derivatives of Basic Functions, The Product and Quotient Rule
- 3.3 The Chain Rule and Inverse Functions
- 3.4 Approximation and Related Rates

### Chapter 4. Applications of Derivatives

(2015). '컴퓨팅 사고력(Computational thinking)' 향상과 Sage 도구를 이용한 수학교육, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집>, 29(1), 19-33.

# 선형대수학

(크롬 브라우저 이용 권장)

[Lab] (python - Sage) <http://matrix.skku.ac.kr/LA/> (English - 무료 강의록)  
<http://matrix.skku.ac.kr/LA-K/> (Korean- 무료 강의록)

Linear Algebra Lectures by  
 SGLee

(2016) Linear Algebra Lectures at SKKU :

<http://matrix.skku.ac.kr/LA/Ch-1/>  
<http://matrix.skku.ac.kr/LA/Ch-2/>  
<http://matrix.skku.ac.kr/LA/Ch-3/>  
<http://matrix.skku.ac.kr/LA/Ch-4/>  
<http://matrix.skku.ac.kr/LA/Ch-6/>  
<http://matrix.skku.ac.kr/LA/Ch-7/>  
<http://matrix.skku.ac.kr/LA/Ch-8/>  
<http://matrix.skku.ac.kr/LA/Ch-9/>  
<http://matrix.skku.ac.kr/LA/Ch-10/>




(e-book : Korean) <http://ibook.skku.edu/Viewer/LA-Textbook> (English - 무료 책)  
 (English) <http://ibook.skku.edu/Viewer/LA-Text-Eng> (Korean - 무료 책)

# Contents (standard)

## Linear Algebra with

<http://matrix.skku.ac.kr/LA-Sage/>

### Contents

**Chapter 1, Vectors**

- \*1.1 Vectors in n-space
- \*1.2 Inner product and Orthogonality
- 1.3 Vector equations of lines and planes
- 1.4 Exercise

**Chapter 2, Linear system of equations**

- 2.1 Linear system of equations
- 2.2 Gaussian elimination and Gauss-Jordan elimination
- 2.3 Exercise

**Chapter 3, Matrix and Matrix Algebra**

- 3.1 Matrix operation
- 3.2 Inverse matrix
- 3.3 Elementary matrix
- 3.4 Subspace and linear independence
- 3.5 Solution set of a linear system and matrix
- 3.6 Special matrices
- \*3.7 LU-decomposition
- 3.8 Exercise

**Chapter 4, Determinant**

- 4.1 Definition and Properties of the Determinants
- 4.2 Cofactor Expansion and Applications of the Determinants
- 4.3 Cramer's Rule
- \*4.4 Application of Determinant
- 4.5 Eigenvalues and Eigenvectors
- 4.6 Exercise

**Chapter 5, Matrix Model**

- 5.1 Lights out Game
- 5.2 Power Method
- 5.3 Linear Model (Google)

**Chapter 6, Linear Transformations**


- 6.1 Matrix as a Function (Transformation)
- 6.2 Geometric Meaning of Linear Transformations
- 6.3 Kernel and Range
- 6.4 Composition of Linear Transformations and Invertibility
- \*6.5 Computer Graphics with Sage
- 6.6 Exercises

**Chapter 7, Dimension and Subspaces**

- 7.1 Properties of bases and dimensions
- 7.2 Basic spaces of matrix
- 7.3 Rank-Nullity theorem
- 7.4 Rank theorem
- 7.5 Projection theorem
- \*7.6 Least square solution
- 7.7 Gram-Schmidt orthogonalization process
- 7.8 QR-Decomposition; Householder transformations
- 7.9 Coordinate vectors
- 7.10 Exercises

**Chapter 8, Diagonalization**

- 8.1 Matrix Representation of LT
- 8.2 Similarity and Diagonalization
- 8.3 Diagonalization with orthogonal matrix, \*Function of matrix
- 8.4 Quadratic forms
- \*8.5 Applications of Quadratic forms
- 8.6 SVD and \*generalized eigenvectors
- 8.7 Complex eigenvalues and eigenvectors
- 8.8 Hermitian, Unitary, Normal Matrices
- \*8.9 Linear system of differential equations
- 8.10 Exercises



## From vectors to JCF

# 통계학

<http://matrix.skku.ac.kr/2015-R-Statistics/R-Sage-Statistics-Lab-1.htm>

<http://matrix.skku.ac.kr/2015-R-Statistics/R-Sage-Statistics-Lab-2.htm>

장 별	실습 내용	실습실
1	통계학의 이해	없음
2	자료의 정리 및 요약	<a href="http://matrix.skku.ac.kr/2015-R-Statistics/R-Sage-Statistics-Lab-1.htm">http://matrix.skku.ac.kr/2015-R-Statistics/R-Sage-Statistics-Lab-1.htm</a>
3	이산 확률변수 및 분포	
4	연속 확률변수 및 분포	<a href="http://matrix.skku.ac.kr/2015-R-Statistics/R-Sage-Statistics-Lab-2.htm">http://matrix.skku.ac.kr/2015-R-Statistics/R-Sage-Statistics-Lab-2.htm</a>
5	표집분포와 중심극한정리	
6	추정	

## R을 활용한 기초 통계학 실습실 II

\* 공개된 자료(Published Data):  
[R 동영상 교육](#) | [R-Statistical Software \(All R Videos\)](#)


\* 참고도서: 이상구, 이계화, 김경원. [비록중서005] 선형대수학. BigBook, 2014.  
 \* 참고도서: 최용석. [비록중서008] R과 함께하는 통계학의 이해. BigBook, 2014.

### II. 확률과 확률분포

Lesson 1 확률의 개념과 여러가지 확률

■ 참고 동영상 <https://youtu.be/uzkc-qVvoOk>

Probability explained | Independent and dependent events



(1) 여러분이 가지고 있는 동전 10개를 던져 보고 앞면의 수와 뒷면의 수를 기록해봅시다.

```
1 coin = sample(c("앞", "뒤"), 10, replace = TRUE)
2 coin
3 table(coin)
```

실행(Evaluate)

```
[1] "뒤" "뒤" "앞" "뒤" "뒤" "앞" "앞" "뒤" "뒤" "앞"
[1] 6
[1] 4
```

Powered by SDGE

(2) 45개 숫자에서 6개 숫자를 뽑으시오.

```
1 # 45개에서 6개 숫자 뽑기
2 sample(1:45, 6)
```

실행(Evaluate)

```
[1] 13 2 5 3 27 18
```

Powered by SDGE

(3) 로또 1등 당첨 확률을 구해보시오.

```
1 # 45개의 수에서 6개의 숫자가 나올 모든 종류의 수
2 choose(45, 6)
```

(2015). R을 활용한 '대하형 통계학 입문 심습실' 개발과 활용, 한국수학교육학  
 회지 시리즈 E <수학교육 논문집>, 29(4), 573-588.

# 공학수학

최신 공학수학 WITH SAGE (2016년 1월, 한빛아카데미)



최신 공학수학 with Sage I, II

최신 공학수학 with Sage I, II  
이양구, 김동욱, 박준원, 장윤기, 이태하 지음  
2016년 1월 12일 발행  
400쪽 공학수학 with Sage I > 500쪽, 25,000원  
ISBN 979-11-5666-009-1  
400쪽 공학수학 with Sage II > 444쪽, 23,000원  
ISBN 979-11-5666-010-7



책임을 잃게 되는 경우가 많다.

공학수학(mathematical modelling)은 자연과 사회 과학 그리고 산업의 여러 분야의 중요한 수학적 방법의 기술을 제공하는 응용수학의 한 분야이다. 다양한 문제를 해결하기 위해서 다양한 분야의 수학을 다루기 위해, 선형대수, 미분방정식, 선형대수 및 편미 방정식, 전자기학, 전자기학, 유체역학, 그리고 통계학 등이 포함된다.

이러한 공학수학은 현대의 기술 발전에서 중요한 위치를 차지하고 있다. 특히, 다양한 분야의 문제를 해결하기 위해, 다양한 분야의 수학을 다루기 위해, 선형대수, 미분방정식, 선형대수 및 편미 방정식, 전자기학, 전자기학, 유체역학, 그리고 통계학 등이 포함된다.

(서평) <http://www.kms.or.kr/kms/Newsletter/online/166%282016.3%29.pdf>  
(공학수학 실습실) <http://www.hanbit.co.kr/EM/sage/>

## 공학수학 실습실

<http://www.hanbit.co.kr/EM/sage/>

요점 강의

최신 공학수학 with Sage 실습실

Chapter 04 2계 미분방정식

예제 1-1

$y_1 = e^x$ 과  $y_2 = e^{-x}$ 이 모든  $x$ 에 대해 다음의 동차 선형미분방정식의 해임을 보이고, [정리 4.1.1]이 성립함을 보여라.

$$y'' - y = 0$$

풀이  $y_1'' - y_1 = e^x - e^x = 0$ ,  $y_2'' - y_2 = e^{-x} - e^{-x} = 0$ 이므로 두 함수  $y_1, y_2$ 는 동차 선형 미분방정식  $y'' - y = 0$ 의 해이다. 일차결합을  $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$ 이라 하면

$$y'' - y = (c_1 e^x + c_2 e^{-x}) - (c_1 e^x + c_2 e^{-x}) = 0$$

이므로 역시  $y'' - y = 0$ 의 해이다. 따라서 [정리 4.1.1]을 만족한다.

Sage 코드

```

var('x')
y = function(x)
de = dsolve(diff(y,x,2) - y == 0, [x, x])
print de
    
```

실행(Evaluate)

Sage 코드

```

_12^2*e^(-x) + _12^2*e^x
    
```

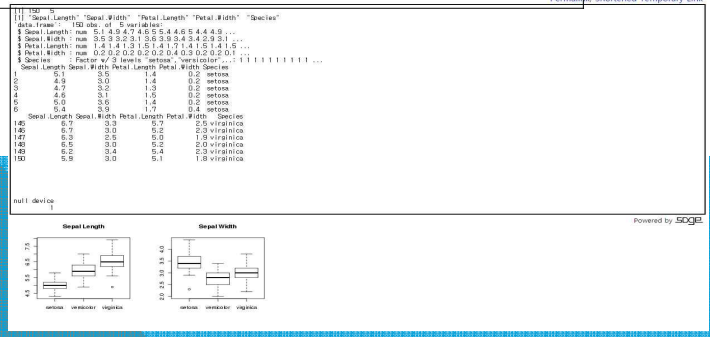
Help | Powered by SageMath

(2016). SageMath를 활용한 '대화형 공학수학 실습실'의 개발과 활용, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집>, 30(3), 281-294.

장 별	실습 내용	실습실
1	행렬과 선형대수	<a href="http://www.hanbit.co.kr/EM/sage/1_chap1.html">http://www.hanbit.co.kr/EM/sage/1_chap1.html</a>
2	미분방정식의 기초	<a href="http://www.hanbit.co.kr/EM/sage/1_chap2.html">http://www.hanbit.co.kr/EM/sage/1_chap2.html</a>
3	1계 미분방정식	<a href="http://www.hanbit.co.kr/EM/sage/1_chap3.html">http://www.hanbit.co.kr/EM/sage/1_chap3.html</a>
4	<b>2계 미분방정식</b>	<a href="http://www.hanbit.co.kr/EM/sage/1_chap4.html">http://www.hanbit.co.kr/EM/sage/1_chap4.html</a>
5	<b>고계 미분방정식</b>	<a href="http://www.hanbit.co.kr/EM/sage/1_chap5.html">http://www.hanbit.co.kr/EM/sage/1_chap5.html</a>
6	연립 미분방정식	<a href="http://www.hanbit.co.kr/EM/sage/1_chap6.html">http://www.hanbit.co.kr/EM/sage/1_chap6.html</a>
7	<b>급수해법</b>	<a href="http://www.hanbit.co.kr/EM/sage/1_chap7.html">http://www.hanbit.co.kr/EM/sage/1_chap7.html</a>
8	<b>라플라스 변환</b>	<a href="http://www.hanbit.co.kr/EM/sage/1_chap8.html">http://www.hanbit.co.kr/EM/sage/1_chap8.html</a>
9	벡터미분	<a href="http://www.hanbit.co.kr/EM/sage/2_chap9.html">http://www.hanbit.co.kr/EM/sage/2_chap9.html</a>
10	벡터적분	<a href="http://www.hanbit.co.kr/EM/sage/2_chap10.html">http://www.hanbit.co.kr/EM/sage/2_chap10.html</a>
11	<b>푸리에급수 및 변환</b>	<a href="http://www.hanbit.co.kr/EM/sage/2_chap11.html">http://www.hanbit.co.kr/EM/sage/2_chap11.html</a>
12	<b>편미분방정식</b>	<a href="http://www.hanbit.co.kr/EM/sage/2_chap12.html">http://www.hanbit.co.kr/EM/sage/2_chap12.html</a>
13	복소함수	<a href="http://www.hanbit.co.kr/EM/sage/2_chap13.html">http://www.hanbit.co.kr/EM/sage/2_chap13.html</a>
14	복소적분	<a href="http://www.hanbit.co.kr/EM/sage/2_chap14.html">http://www.hanbit.co.kr/EM/sage/2_chap14.html</a>
15	급수와 유수	<a href="http://www.hanbit.co.kr/EM/sage/2_chap15.html">http://www.hanbit.co.kr/EM/sage/2_chap15.html</a>
16	등각사상	<a href="http://www.hanbit.co.kr/EM/sage/2_chap16.html">http://www.hanbit.co.kr/EM/sage/2_chap16.html</a>

# Math 4 빅데이터 <http://matrix.skku.ac.kr/E-Math/>

```
dim(iris) # 데이터의 관측치수와 변수수를 정리
names(iris) # 변수명
str(iris) # 데이터의 구조
head(iris) # 데이터의 앞쪽 일부 보여주기
tail(iris) # 데이터의 뒷쪽 일부 보여주기
par(mfrow=c(2,2)) # 1페이지에 2x2로 그래프 그리는 옵션
boxplot(iris[,1]~iris[,5],main="Sepal Length") # iris[,5]가 종을 나타내는 변수
boxplot(iris[,2]~iris[,5],main="Sepal Width")
boxplot(iris[,3]~iris[,5],main="Petal Length")
boxplot(iris[,4]~iris[,5],main="Petal Width")
```



## [Lab] <http://matrix.skku.ac.kr/E-Math/>

### Mathematics for BigData

#### Lesson 1 Introduction

■ 참고 동영상 <https://youtu.be/EURJnLppzKc>

■ 참고 자료

SKKU Math for Big Data, Lecture 1, Introduction, <https://youtu.be/EURJnLppzKc>

Math for Big Data, Lecture 2, LU Decomposition, <https://youtu.be/bzhTnoN3atk>

Math for Big Data, Lecture 3, Schur Decomposition, [https://youtu.be/F2kZON0oS\\_w](https://youtu.be/F2kZON0oS_w)

Math for Big Data, Lecture 4, Power Method, [https://youtu.be/n4KD4aq\\_jxw](https://youtu.be/n4KD4aq_jxw)

Math for Big Data, Lecture 5, QR Decomposition, <https://youtu.be/gQ7gxTx5f9k>

Math for Big Data, Lecture 6, Google's PageRank algorithm, <https://youtu.be/tp6B7s43jAI>

Math for Big Data, Lecture 7, Singular Value Decomposition(SVD), <https://youtu.be/AxL4Q83IdAA>

Math for Big Data, Lecture 8, Least Square Solutions, <https://youtu.be/GwHh5lh5wEs>

Math for Big Data, Lecture 9, Polar Decomposition, NMF, <https://youtu.be/FqkMP9lBtaE>

Math for Big Data, Lecture 10, Finding JCF using Dot Diagram, <https://youtu.be/1E3wXN1oZyc>

Math for Big Data, Lecture 11, Generalized eigenvectors and Matrix Function, [https://youtu.be/lK4\\_Kp6P\\_N4](https://youtu.be/lK4_Kp6P_N4)

Math for Big Data, Lecture 12, Principal Component Analysis (PCA), <https://youtu.be/0lKbsINH7xk>

## 요약 / 특징

- 오픈소스 (SageMath, R)를 이용하여 제작
- 대한민국 대표 CAS 도구로 부상 (무료)
- 초-중등-대학 다양한 수준의 수학교육과정
- 자연스럽게 계산과 시각화가  
Python(Sage)/R 코딩을 이용하여 진행되는  
과정을 학생들에게 노출시킴
- 개념과 한 문제 만 가르키고 숙제하면 – 모든 문제 해결력 완비 ^^



## Conclusion (결론)

- 초-중등-대학 과정 **다양한 수준의 수학교육과정에서 자연스럽게** 계산과 시각화가 Python(Sage)/R 코딩을 이용하여 진행되는 과정을 학생들에게 노출시키고, 실제 함수와 조건을 바꾸면서 실습을 해보게 함
- **수학 + 컴퓨팅 사고력(Computational Thinking, CT)**
- 예: **고교 미적, 고교 통계, 대학 미적분학, 선형대수학, 미분방정식, 통계학, 공학수학 ... 의 콘텐츠와 수학 실습실**
- 개발된 실습실의 사용으로 고교 및 대학 과정에서 수학을 지도하면서 자연스럽게 CT교육이 가능하고 이를 통해서 미래 수학 교사가 CT 교육의 중심에 설 것이다. 그리고 우리에게 수학을 배운 학생들이 교사 뿐만 아니라 4차 산업혁명/빅데이터 시대에 필요한 인재들이 태어날 것이다. 그렇다면 우리의 수학과는 최고의 학과로 오랜동안 남게 될 것이다.

Thank You!

sglee@skku.edu

