Spring 2012 Quiz 1 Solutions							Sign
Course	Linear Algebra with Sage	GEDB003 (42)			Prof.	Sang-Gu Lee	
Major		학년		학번		Name	
							Points

var('a,b,c,d') # 변수정의	vector([3, 1, 2]) # 벡터정의
eq1=3*a+3*b==12 # equation1 정의	var('x, y') # 변수정의
eq2=5*a+2*b==13 # equation2 정의	plot3d(y^2+1-x^3-x, (x, -pi, pi), (y, -pi, pi)) # 3차원 Plot
solve([eq1, eq2], a,b) # Solve 연립방정식	implicit_plot3d(n.inner_product(p_0-p)==0, (x, -10, 10), (y, -10, 10), (z, -10, 10)) # 3차원 Hyperplane Plot
A=matrix(QQ, 3, 3, [3, 0, 0, 0, 0, 2, 0, 3, 4]); # 행렬정의	var('t') # 변수정의 (매개변수방정식)
A.echelon_form() # RREF	x=2+2*t
A.inverse() # 역행렬	y=-3*t-2
A.det() # 행렬식	parametric_plot((x,y), (t, -10, 10), rgbcolor='red') # 직선 Plot
A.adjoint().transpose() # adjoint matrix	
A.eigenvalues() # 고유값	
A.eigenvectors_right() # 고유벡터	
P,L,U=A.LU() # LU분해 # (P: Permutation행렬 / L,U:삼각행렬)	<Sage Linear Algebra 입문 명령어 일부>

I. (5pt x 4 = 20pt) Define or Find. (You can use any of your method.)

1. [Gaussian elimination] Find all solutions of $\begin{cases} x+y+2z=1 \\ x-2y+z=0 \\ 3x+y-z=3 \end{cases}$

Sol

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[(-3)R_1+R_3]{(-1)R_1+R_2} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -7 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{-\frac{1}{3}R_2} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -2 & -7 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{2R_2+R_3} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{19}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right] \xrightarrow{-\frac{3}{19}R_3} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{19} \end{array}\right]$$

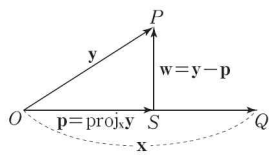
SAGE: A.echelon_form() : REF ($\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right]$) = $\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{19} \end{array}\right]$

$$\Rightarrow \quad x=\frac{16}{19},\ y=\frac{7}{19},\ z=-\frac{2}{19} \quad \blacksquare$$

2. Tell me how you can find the projection $\mathrm{proj}_{\mathbf{x}}\,\mathbf{y}$ and $D=\|\mathrm{proj}_{\mathbf{x}}\,\mathbf{y}\|$ when $\mathbf{x}=(2,\ -1,\ 2,\ 1)$, $\mathbf{y}=(3,\ -1,\ 3,\ 1)$.

[Find $\mathbf{y}$의 $\mathbf{x}$위로의 정사영과 크기(norm)]

Sol $\mathrm{proj}_{\mathbf{x}}\,\mathbf{y} = t\mathbf{x} = \dfrac{(\mathbf{y}\cdot\mathbf{x})}{\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}}\mathbf{x} = \dfrac{7}{5}(2,-1,2,1)$



$$D=\|\mathrm{proj}_{\mathbf{x}}\,\mathbf{y}\| = \frac{7}{5}\sqrt{10}$$

3. State what you know about LU-factorization:

Sol ① A reason to learn LU 분해 (LU분해를 배우는 이유를 서술하여라.)

A의 REF(row echelon form)은 상삼각행렬(upper triangular matrix) U이다. 그런데 그 U는 A에 기본행렬들(elementary matrices)를 곱함으로 얻어진다. 그런데 E_i들은 치환행렬(permutation matrix) 또는 하삼각행렬(lower triangular matrix)이다. 더구나 하삼각행렬(lower triangular matrix)의 역행렬(inverse)도 하삼각행렬(lower triangular matrix)이다. 따라서 치환행렬이 되는 경우를 별도로 처리하면, 일반성을 잃지 않고 우리는 $A = LU$로 쓸 수 있다. 이를 이용하여 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ $(\Rightarrow LU\mathbf{x} = \mathbf{b})$ 의 해를 간단한 알고리즘을 통하여 구할 수 있다. 즉 $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$는 전진대입법(forward substitution)으로 쉽게 풀 수 있고, 또 $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$는 후진대입법(backward substitution)으로 쉽게 풀 수 있다. 따라서 쉽게 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$를 쉽게 풀 수 있게 된다.

② **[CAS:Sage]** How you can find LU분해 of A? (임의의 5차 정사각행렬 A 의 (P)LU분해를 당신은 어떻게 구할 것인가?)

1) Step 1: 인터넷(http://math1.skku.ac.kr)에 접속하여 새 워크시트를 연다.
2) Step 2:
3) Define SAGE: **A=matrix(QQ, 5, 5, [행렬 A의 성분을 나열]**
4) **P, L, U = A.LU( )**

4. (Page 60, 2-1-8) Find the number of free variables of the following LSE. (자유변수의 개수는?)

$$\begin{cases} 3x_1 + 9x_2 + 2x_3 - 2x_4 - 4x_5 = 2 \\ \quad\quad 3x_2 + 7x_3 - 5x_4 - 6x_5 = 5 \\ \quad\quad\quad\quad -5x_3 \quad\quad\quad = 7 \end{cases}$$

Sol Leading variables : 3개 (x_1, x_2, x_3)

Free variables : 2개 (x_4, x_5)

III. (5pt x 2 = 10pt) Explain :

5. If A is an invertible lower triangular (가역 하 삼각) matrix, then A^{-1} is lower triangular. (하삼각행렬임을 설명하여라)

Sketch of Proof

A가 가역이므로 $E_k \cdots E_1 A = I_n$ (E_i는 모두 기본행렬이다.) (1)

A가 하삼각행렬이므로 E_i $(1 \le i \le k)$는 I_n에서 기본행연산을 할 때 (행의 교환없이) 1st type 기본행연산(ERO) $cR_i \to R_i$와 3rd type 기본행연산(ERO) $cR_i + R_j \to R_j$ $(i < j)$만 하면 되므로 각각의 E_i $(1 \le i \le k)$는 하삼각행렬이다. 그러면 (1)에 의하여, $A^{-1} = E_k \cdots E_1$은 삼각행렬들의 곱인데 (1)에서 보였듯이 하삼각행렬의 곱은 하삼각행렬이 되므로 A^{-1}는 하삼각행렬이다.

6. Tell me how you can show $W_7 = \{(x_1, x_2, x_3) \in R^3 \mid x_3 = x_1 + x_2\}$ is a subspace of R^3. [부분공간인 이유를 설명]

Sketch of Proof (Hint: 2-step subspace test)

Let $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \in W_7$, $k \in R$

(1) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1, u_2, u_3) + (v_1, v_2, v_3) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3) \in W_7$

$(\because\ u_3 + v_3 = (u_1 + u_2) + (v_1 + v_2) = (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2)$)

(2) $k\mathbf{u} = k(u_1, u_2, u_3) = (ku_1, ku_2, ku_3) \in W_7$

$(\because\ ku_3 = k(u_1 + u_2) = ku_1 + ku_2$)

Thus, W_7 is a subspace of R^3. ■

Note. 부분공간의 정의

집합 $W(\neq \varnothing)$가 R^n의 부분집합이라 하자. 이때 다음 두 조건을 만족하면 W는 R^n의 부분공간이다.

1. $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in W \Rightarrow \mathbf{x} + \mathbf{y} \in W$
2. $\mathbf{x} \in W,\ k \in R \Rightarrow k\mathbf{x} \in W$

Spring 2012, Midterm Exam (Solution)						Sign
Course	Linear Algebra with Sage	GEDB003 (42)		Prof.	Sang-Gu Lee	

Major		학년		학번		Name	

※ Notice

1. 답안 작성전에 반드시 계열 · 대학(학부), 학과(전공), 학년, 학번, 이름 등을 빠짐없이 기입하고 감독자의 날인을 받아야 합니다.
2. **시험 부정행위시 해당 교과목 성적이 "F" 처리됨은 물론 소속학부 징계위원회에 회부될 수 있습니다.**
3. 답안을 모두 작성한 경우에도 감독위원의 지시가 있기 전에는 고사장 밖으로 나갈 수 없으며, 감독위원의 퇴실 지시가 있으면 반드시 답안지를 감독위원께 제출한 후에 퇴실하시기 바랍니다.
4. **문제풀이 시 <아래의 Sage명령어를 이용하여 답을 구하는 과정을 서술하셔도 됩니다.>**

Score (100)	
Project P.	Exam
15	85

```
var('a,b,c,d')                                  # 변수정의
eq1=3*a+3*b==12                                 # equation1 정의
eq2=5*a+2*b==13                                 # equation2 정의
solve([eq1, eq2], a,b)                          # Solve 연립방정식

A=matrix(CDF, 3, 3, [3, 0, 0, 0, 0, 2, 0, 3, 4]);   # 행렬정의
A.echelon_form()                                # RREF
A.inverse()                                     # 역행렬
A.det()                                         # 행렬식
A.adjoint()                                     # adjoint matrix
A.eigenvalues()                                 # 고유값
A.eigenvectors_right()                          # 고유벡터
A.charpoly()                                    # 특성방정식
```

```
P,L,U=A.LU() # LU분해 # (P: Permutation행렬 / L,U:삼각행렬)
vector([3, 1, 2])                               # 벡터정의
var('x, y')                                     # 변수정의
plot3d(y^2+1-x^3-x, (x, -pi, pi), (y, -pi, pi))  # 3차원 Plot

implicit_plot3d(n.inner_product(p_0-p)==0, (x, -10, 10), (y, -10,
10), (z, -10, 10))                              # 3차원 Hyperplane Plot

var('t')                                        # 변수정의 (매개변수방정식)
x=2+2*t
y=-3*t-2
parametric_plot((x,y), (t, -10, 10), rgbcolor='red')  # 직선 Plot
```

<Sage Linear Algebra 입문 명령어 일부>

I. (3pt x 6= 18pt) True(T) or False(F). Let $A \in M_{n\times n}$ and $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in R^n$.

1. (F) 모든 정사각행렬은 기본행렬의 곱으로 표현가능하다.
2. (T) 성분이 모두 정수인 n차 행렬 A의 행렬식의 값이 1이면, A^{-1}의 성분들은 모두 정수이다.
3. (T) $A, B \in M_n$일 때, $\det(AB) = \det(BA)$
4. (T) $\text{proj}_{\mathbf{u}}\mathbf{v} = \dfrac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}}\mathbf{u}$ <Quiz 1>
5. (F) 미지수의 수가 n이고 방정식의 수가 n인 선형연립방정식은 크래머 법칙을 이용하여 해를 계산할 수 있다.
6. (F) 실수성분으로 구성된 2×2 크기의 행렬 A는 $\lambda^2 + \text{tr}(A)\lambda + \det(A) = 0$ 를 만족한다.

II. (3pt x 4 = 12pt) State or Define

1. 아래 중 본인에 맞는 난이도의 개념 4개를 골라 본인이 이해한 대로 아래 빈 공간에 간결 명확하게 서술하여라.

> 평면 π 의 법선벡터(normal vector), 일차독립(linearly independent)과 일차종속, 부분공간의 조건, 크래머의 공식(Cramer's Rule), 고유값(eigenvalue), 고유벡터(eigenvector), 선형변환(LT), 직교행렬(orthogonal matrix), 선형변환 $T : R^n \to R^m$ 의 치역(range), 전사(surjective 또는 onto), 단사(injective, 1-1), 동형사상(isomorphism)

일반적으로 R^n의 부분집합 $W = \phi$가 다음과 같은 두 가지 성질을 만족하면 W를 R^n의 부분공간(subspace)이라 한다.

$$\begin{cases} \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \in W & (\text{덧셈에 닫혀 있다}) \quad (1) \\ k\mathbf{w} \in W & (\text{스칼라곱에 닫혀 있다}) \quad (2) \end{cases}$$

(여기에서, $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w} \in W$, $k \in R$).

$S = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k\} \subseteq R^n$에 대하여

$$c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \cdots + c_k\mathbf{x}_k = \mathbf{0} \quad (c_1, c_2, \ldots, c_k \in R)$$

$$\Rightarrow c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 0$$

이면, 벡터 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k$ (또는 집합 S)는 일차독립(linearly independent)이라고 하고, 또한 벡터 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k$ (또는 집합 S)가 일차독립이 아니면 일차종속(linearly dependent)이라고 한다.

[크레머 공식] 선형연립방정식 $\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{array}$ 의 계수행렬을 A라 하고 $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ 이라 하면, 이 연립방정식은 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$로 나타낼 수 있다. 이때, $|A| \neq 0$이면 이 연립방정식은 유일한 해 $x_1 = \dfrac{|A_1|}{|A|}$, $x_2 = \dfrac{|A_2|}{|A|}$, $\cdots$, $x_n = \dfrac{|A_n|}{|A|}$ 을 갖는다. 여기서 A_j $(j = 1, 2, \cdots, n)$는 A의 j열을 $\mathbf{b}$로 바꾼 행렬이다.

A를 n차의 정사각행렬이라 하자. $\mathbf{0}$아닌 벡터 $\mathbf{x} \in R^n$가 적당한 스칼라 λ에 대하여 $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$을 만족하면 λ를 A의 **고유값(eigenvalue)**이라 하고, $\mathbf{x}$를 λ에 대응하는 A의 **고유벡터(eigenvector)**라고 한다.

선형변환 $T : R^n \to R^m$의 치역(range) : $\operatorname{Im} T = \{T(\mathbf{v}) \in R^m \ : \mathbf{v} \in R^n\} \subset R^m$.

$T : R^n \to R^m$이 선형변환이면 T의 표준행렬 $A = [\,T\,]$ 와 $\mathbf{x} \in R^n$에 대하여 $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, $\forall\ \mathbf{x} \in R^n$ 여기서 $A = [\,T(\mathbf{e}_1) : T(\mathbf{e}_2) : \cdots : T(\mathbf{e}_n)\,]$ 이 성립한다. ... ■

Ⅲ. (3pt x 10 = 30pt) Find or Explain :

1. (Quiz 1) Explain why the map $T : R^3 \to R^2$ by $T(x, y, z) = (3x + 4y, 2x - 5y)$ is a Linear Transformation.

Why) For all $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \in R^3$ and $k \in R$,

$$\begin{aligned} T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3) &= (3(u_1 + v_1) + 4(u_2 + v_2),\ 2(u_1 + v_1) - 5(u_2 + v_2)) \\ &= ((3u_1 + 4u_2) + (3v_1 + 4v_2),\quad (2u_1 - 5u_2) + (2v_1 - 5v_2)) \\ &= (3u_1 + 4u_2,\ 2u_1 - 5u_2) + (3v_1 + 4v_2,\ 2v_1 - 5v_2) \\ &= T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}). \end{aligned}$$

And $$\begin{aligned} T(k\mathbf{u}) = T(ku_1, ku_2, ku_3) &= (3ku_1 + 4ku_2,\quad 2ku_1 - 5ku_2) \\ &= k(3u_1 + 4u_2,\quad 2u_1 - 5u_2) \quad = kT(\mathbf{u}). \end{aligned}$$

Therefore T is a L.T. ■

2. Find : 점 $P(10, -15, 4)$를 지나고 벡터 $\mathbf{a} = (4, 8, 7)$ 에 평행한 **직선의 벡터방정식**을 구하여라.

Ans $\mathbf{x} = \mathbf{p} + t\mathbf{a}$ (단, $t \in R$)
$= (10, -15, 4) + t(4, 8, 7)$ ■

3. Find : 점 $P(10, -15, 4)$를 지나고 벡터 $\mathbf{a} = (4, 8, 7)$ 와 $\mathbf{b} = (4, 5, -6)$가 만드는 **평면의 벡터방정식**을 구하여라.

Ans $\mathbf{x} = \mathbf{p} + t_1\mathbf{a} + t_2\mathbf{b}$ (단, $t_1,\ t_2 \in R$)
$= (10, -15, 4) + t_1(4, 8, 7) + t_2(4, 5, -6)$ ■

4. Find : 다음 행렬이 가역행렬이 될 수 있는 x, y값은?

$$A = \begin{bmatrix} x^2 & 0 & 0 \\ y & x-1 & 0 \\ 1 & 2 & (y-1)(x-4) \end{bmatrix}$$

Sol $\begin{cases} x^2 = 0 \\ x - 1 = 0 \\ (y-1)(x-4) = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow x = 0, x = 1, x = 4, y = 1$ $\therefore x \neq 0, 1, 4$, $y \neq 1$인 모든 실수 ■

5. 학생이 연구소에 취직하여 (29차, 여기서는) 4차 행렬 $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 3 \end{bmatrix}$의 **고유값, 고유벡터, 특성방정식을 구하라**는 요청을 팀장에게 받았다면 어떻게 구할지 Step별로 빈칸에 상세하게 서술하여라.

Sol)

1) Step 1: (예) 인터넷에 접속하여 http://math1.skku.ac.kr 로 이동한다.
2) Step 2: ID= skku, PW = math를 입력하여 접속한다.
3) Step 3: "새 워크시트" 버튼을 누른다.
4) Step 4: 첫번째 셀에 CDF 형식으로 행렬 A를 다음과 같이 정의한다. **A=matrix(CDF,4,4,[4,1,0,2,0,-1,2,0,0,0,1,0,0,4,0,3])**
5) Step 5: 두번째 셀에 eigenvalues를 구하는 명령어 **A.eigenvalues()** 를 입력하고, 실행한다.
6) Step 6: 세번째 셀에 eigenvectors를 구하는 명령어 **A.eigenvectors_right()** 입력하고, 실행한다.
7) Step 7: 네번째 셀에 characteristic polynomial을 구하는 명령어 **A.charpoly()** 입력하고, 실행한다.

[4.0, 3.0, -1.0, 1.0]

[(4.0, [**(1.0, 0, 0, 0)**], 1), (3.0, [**(0.894427191, 0, 0, -0.4472135955)**], 1), (-1.0, [**(0.140028008403, 0.700140042014, 0, -0.700140042014)**], 1), (1.0, [**(-0.377964473009, -0.377964473009, -0.377964473009, 0.755928946018)**], 1)]

x^4 - 7.0*x^3 + 11.0*x^2 + 7.0*x – 12.0 ■

6. A가 n차의 정사각행렬이고 $|A| = 9$일 때, $|(2A)^{-1}|$를 구하여라.

Sol $|(2A)^{-1}| = \dfrac{1}{|2A|} = \dfrac{1}{2^n|A|} = \left(\dfrac{1}{9}\right)\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ ■

7. 다음 행렬의 행렬식과 역행렬을 구하여라.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Ans $|A| = 3$

and $A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 6,\ A_{12} = (-1)\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2,\ A_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -3,\ A_{21} = (-1)\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 0,$

$A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1,\ A_{23} = (-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0,\ A_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -3,\ A_{32} = (-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1,\ A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 3$

$\Rightarrow A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\operatorname{adj} A = \dfrac{1}{|A|}[A_{ij}]^T = \dfrac{1}{3}\begin{bmatrix} 6 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ ■

8. 위의 행렬 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$의 역행렬을 Sage를 이용하여 구하는 과정을 Step별로 빈칸에 상세하게 서술하여라.

Sol)

1) Step 1: (예) 인터넷에 접속하여 http://math1.skku.ac.kr 로 이동한다.
2) Step 2: ID= skku, PW = math를 입력하여 접속한다.
3) Step 3: "새 워크시트" 버튼을 누른다.
4) Step 4: 첫번째 셀에 CC형식으로 행렬 A를 다음과 같이 정의한다. **A=matrix(CC, 3, 3, [1,0,1,-0,3,0,1,0,2])**
5) Step 5: 두번째 셀에 inverse 를 구하는 명령어 **A.inverse()** 를 입력한다.

[2.00 0 -1.0]
[0 0.33 0]
[-1.00 0 1.00] ■

9. 특성다항식이 다음과 같을 때, 물음에 답하여라.

$p(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda-3)^2(\lambda-4)^3$

(1) 행렬의 크기는 얼마인가?
(2) 주어진 행렬은 가역인가? 이유를 설명하여라.

Ans

1) 6×6 행렬 ($\because$ 1+2+3=6) ■

2) $p(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda-3)^2(\lambda-4)^3$

$\Rightarrow A$의 고유값은 $\{1,\ 3,\ 3,\ 4,\ 4,\ 4\}$ $\Rightarrow \det(A) = (1)(3)^2(4)^3 \neq 0\ (\because \det(A) = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n)$

$\therefore A$는 가역이다. ■

10. 표준기저를 이용하여 다음 선형변환의 표준행렬 $[T]$를 구하여라.

$T(x, y, z) = (8x+11y-231z,\ 511x+8y+1z,\ -18x+731y-z)$

Ans $T(x, y, z) = (8x+11y-231z,\ 511x+8y+1z,\ -18x+731y-z)$

$T(\mathbf{e}_1) = (8,\ 511,\ -18),\ T(\mathbf{e}_2) = (11,\ 8,\ 731),$

$T(\mathbf{e}_3) = (-231,\ 1,\ -1)$

$\therefore\ [T] = \begin{bmatrix} 8 & 11 & -231 \\ 511 & 8 & 1 \\ -18 & 731 & -1 \end{bmatrix}$ ■

IV. (5pt x 5 = 25pt) Find or Explain :

1. 선형연산자 $T : R^2 \to R^2$가 임의의 벡터 $\mathbf{x} = (x, y) \in R^2$에 대하여 원점을 지나는 기울기가 θ인 직선에 대칭시키는 변환인 경우 변환행렬 $H_\theta = [\,T(\mathbf{e}_1) : T(\mathbf{e}_2)\,]$를 그림 6.2.5을 보고 구하여라.

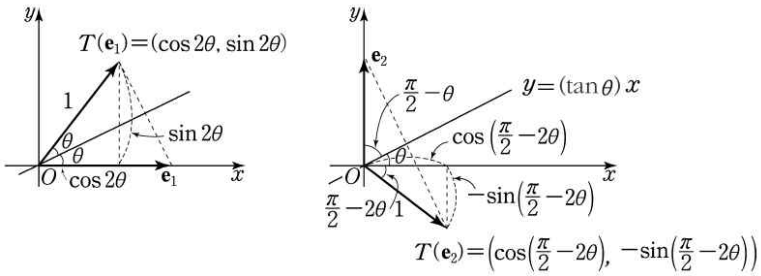


그림 6.2.5 기울기가 θ인 직선에 대한 대칭이동에 따른 표준기저들의 상

(Sol) $H_\theta = [\,T(\mathbf{e}_1) : T(\mathbf{e}_2)] = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right) \\ \sin 2\theta & -\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix}$ 이다. ■

2. 선형변환(선형연산자) $T : R^2 \to R^2$를 그림 6.2.6 같이 R^2상의 임의의 벡터 $\mathbf{x}$를 x축과 이루는 각이 θ인 원점을 지나는 직선에 정사영시키는 정사영변환으로 정의하자. 그리고 주어진 변환 T에 대응하는 표준행렬을 P_θ라 하면, 그림 6.2.7에서 보듯이 아래 관계 $P_\theta\mathbf{x} - \mathbf{x} = \frac{1}{2}(H_\theta\mathbf{x} - \mathbf{x})$ <크기와 방향은 같고 길이는 절반>를 갖는다. 따라서 위에서 구한 대칭이동의 행렬표현 $H_\theta = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix}$를 이용하여 구하여라.

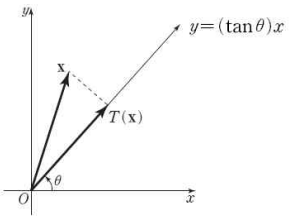


그림 6.2.6 기울기가 θ인 직선에 대한 정사영변환

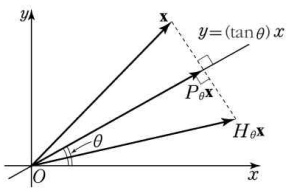


그림 6.2.7 기울기가 θ인 직선에 대한 대칭이동과 정사영변환과의 관계

(Sol) $P_\theta\mathbf{x} - \mathbf{x} = \frac{1}{2}(H_\theta\mathbf{x} - \mathbf{x})$ => $P_\theta\mathbf{x} = \frac{1}{2}H_\theta\mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{x} = \frac{1}{2}H_\theta\mathbf{x} + \frac{1}{2}I\mathbf{x} = \frac{1}{2}(H_\theta + I)\mathbf{x}$

=> $P_\theta = \frac{1}{2}(H_\theta + I) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1+\cos 2\theta) & \frac{1}{2}\sin 2\theta \\ \frac{1}{2}\sin 2\theta & \frac{1}{2}(1-\cos 2\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin\theta\cos\theta \\ \sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta \end{bmatrix}$ ■

3. 가역 행렬 A, B에 대하여 $\operatorname{adj}(AB) = \operatorname{adj} B \cdot \operatorname{adj} A$ 인 이유를 설명하여라.

Ans $\operatorname{adj}(AB) = (|AB|(AB)^{-1})$ $\quad (\because\ C^{-1} = \frac{1}{|C|}\operatorname{adj} C$ => $(\operatorname{adj} C) = (|C|C^{-1}))$

$= (|A||B|(B^{-1}A^{-1}))$

$= |B|B^{-1}|A|A^{-1}$

$= \operatorname{adj} B \cdot \operatorname{adj} A$ ■

4. n차 정사각행렬 A의 고유공간이 R^n의 부분공간인 이유를 설명하여라.

Ans 정사각행렬 A의 임의의 한 고유값 λ_i에 대응하는 고유공간을 $E(\lambda_i)$라 하자.

$E(\lambda_i) = \{\mathbf{x} \in R^n | A\mathbf{x} = \lambda_i \mathbf{x}\} \subseteq R^n,\ k \in R,\ E(\lambda_i) \neq \varnothing$

$\forall\, \mathbf{x},\ \mathbf{y} \in E(\lambda_i),$

우선 $\mathbf{x}+\mathbf{y} \in \mathrm{R}^n$, $k\mathbf{x} \in \mathrm{R}^n$

1) [Show 덧셈에 대해 닫혀있다. Show $\mathbf{x}+\mathbf{y} \in E(\lambda_i)$] (2 pt)

(Pf) $A\mathbf{x} = \lambda_i \mathbf{x},\ A\mathbf{y} = \lambda_i \mathbf{y}$

$A(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = A\mathbf{x} + A\mathbf{y} = \lambda_i \mathbf{x} + \lambda_i \mathbf{y} = \lambda_i(\mathbf{x}+\mathbf{y})$

$\therefore \mathbf{x}+\mathbf{y} \in E(\lambda_i)$

2) [Show 스칼라곱에 대해 닫혀있다. Show $k\mathbf{x} \in E(\lambda_i)$] (2 pt)

(Pf) $A(k\mathbf{x}) = kA\mathbf{x} = k\lambda_i \mathbf{x} = \lambda_i(k\mathbf{x})$

$\therefore k\mathbf{x} \in E(\lambda_i)$

$\therefore E(\lambda_i)$는 위 두 성질을 만족하므로 벡터공간 R^n의 부분공간이다. (1 pt) ■

5. 선형변환 $T : R^n \to R^m$에 대하여, $\mathrm{Im}\, T$는 R^m의 부분공간인 이유를 설명하여라.

(Pf) $\forall\, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in \mathrm{Im}\, T,\ \exists\, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in R^n \ \ni\ T(\mathbf{v}_1) = \mathbf{w}_1,\ T(\mathbf{v}_2) = \mathbf{w}_2$

1) [Show 덧셈에 대해 닫혀있다. Show $\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \in \mathrm{Im}\, T$]

$\Rightarrow\ \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 = T(\mathbf{v}_1) + T(\mathbf{v}_2) = T(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)$ (1 pt)

$\Rightarrow\ \exists\, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \in R^n \ \ni\ T(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \in R^m$ (1 pt)

$\therefore\ \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \in \mathrm{Im}\, T$

2) [Show 스칼라곱에 대해 닫혀있다. Show $k\mathbf{w}_1 \in \mathrm{Im}\, T$]

$\forall\, k \in R,\ k\mathbf{w}_1 = kT(\mathbf{v}_1) = T(k\mathbf{v}_1)$ (1 pt)

$\Rightarrow\ \exists\, k\mathbf{v}_1 \in R^n \ \ni\ T(k\mathbf{v}_1) = k\mathbf{w}_1 \in R^m$ (1 pt)

$\therefore\ k\mathbf{w}_1 \in \mathrm{Im}\, T$

$\therefore\ \mathrm{Im}(T)$는 R^m의 부분공간이다. (1 pt) ■

The End!!

Spring 2012, Final Exam						Sign
Course	Linear Algebra with Sage	GEDB003 (42)		Prof.	Sang-Gu Lee	

Major		학년		학번		Name	

※ 수험생 유의사항
1. 답안 작성전에 반드시 계열・대학(학부), 학과(전공), 학년, 학번, 이름 등을 빠짐없이 기입하고 감독자의 날인을 받아야 합니다.
2. **시험 부정행위시 해당 교과목 성적이 "F" 처리됨은 물론 소속학부 징계위원회에 회부될 수 있습니다.**
3. 답안을 모두 작성한 경우에도 감독위원의 지시가 있기 전에는 고사장 밖으로 나갈 수 없으며, 감독위원의 퇴실 지시가 있으면 반드시 답안지를 감독위원께 제출한 후에 퇴실하시기 바랍니다.
4. **문제풀이 시 <아래의 Sage명령어를 이용하여 답을 구하는 과정을 서술하셔도 됩니다.>**

Score (140)	
PBL 43	EXAM 97

```
var('a,b,c,d')                                  # 변수정의
eq1=3*a+3*b==12                                 # equation1 정의
eq2=5*a+2*b==13                                 # equation2 정의
solve([eq1, eq2], a,b)                          # Solve 연립방정식

A=matrix(QQ, 3, 3, [3, 0, 0, 0, 0, 2, 0, 3, 4]);   # 행렬정의
A.echelon_form()                                # RREF
A.inverse()                                     # 역행렬
A.det()                                         # 행렬식
A.adjoint()                                     # adjoint matrix
A.eigenvalues()                                 # 고유값
A.eigenvectors_right()                          # 고유벡터
A.rank()                                        # A의 계수
A.right_nullity()                               # A의 nullity
P,L,U=A.LU() # LU분해 # (P: Permutation행렬 / L,U:삼각행렬)
```

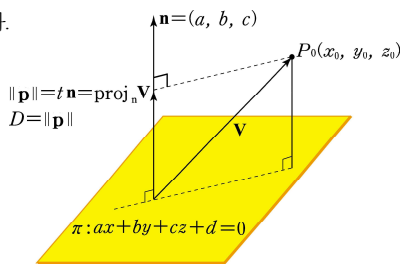
```
vector([3, 1, 2])                               # 벡터정의
var('x, y')                                     # 변수정의
f = 7*x^2 + 4*x*y + 4*y^2-23
implicit_plot( f, (x, -10, 10), (y, -10, 10))   # 타원 Plot
plot3d(y^2+1-x^3-x, (x, -pi, pi), (y, -pi, pi))  # 3차원 Plot

var('t')                                        # 변수정의 (매개변수방정식)
x=2+2*t
y=-3*t-2
parametric_plot((x,y), (t, -10, 10), rgbcolor='red')  # 직선 Plot
A.jordan_form()   # A의 Jordan 표준형을 구한다
```

<Sage Linear Algebra 입문 명령어 일부>

I. (2점 x 17 = 34점) 맞으면(T) or 틀리면(F) 표 하시오. 여기서 $A \in M_{n\times n}(R)$, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in R^n$ 이다.

1. ( ) 행렬 A의 열벡터가 모두 정규직교벡터 이면, $\mathrm{Col}(A) = \mathrm{Col}(AA^T)$ 이다.
2. ( ) R^n의 순서기저 $\alpha = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$에 대한 $\mathbf{x}$의 좌표벡터 $[\mathbf{x}]_\alpha$는 항상 유일하다.
3. ( ) $S = \{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$가 R^n의 기저이고 A가 n차의 가역 행렬이면 $\{A\mathbf{x}_1, \ldots, A\mathbf{x}_n\}$도 R^n의 기저이다.
4. ( ) $n\times n$행렬 A가 가역이고 $A^{-1} = A^T$이면 A의 열벡터가 R^n의 정규직교기저를 이룬다.
5. (F) $\{(1, 2), (0, 1), (2, 1)\}$는 R^2의 기저이다.
6. ( ) $S = \{(1, 1, 1), (0, 0, 1), (1, 0, 0)\}$는 R^3의 기저이다.
7. (F) 변환 $T(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + 3x_2 + 1, -x_1 + x_2, x_3)$이 선형변환이다.



8. ( ) $\mathbf{p} = \mathrm{proj}_{\mathbf{n}}\mathbf{v} = t\,\mathbf{n} = \dfrac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}}{\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}}\mathbf{n}$
9. ( ) 선형변환 $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1x_1 + 3x_4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 \\ 2x_1 + x_2 \\ 3x_1 - x_2 - x_4 \end{bmatrix}$의 표준행렬이 $[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$이고 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{REF} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{bmatrix}$이므로 $\ker T = \{(0,0,0,0)\} = \{\mathbf{0}\}$이다.
10. (F) R^n상에서 한 원점을 지나는 직선 위로의 정사영 $T(\mathbf{x}) = \mathrm{proj}_{<\mathbf{a}>}\mathbf{x} = P\mathbf{x}$ 에 대응하는 표준행렬의 계수(rank)는 2이다.
11. ( ) 벡터들의 집합 $\{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$ 은 R^3의 기저이다.
12. ( ) 동차 연립방정식 $\begin{cases} 9x_1 - 7x_2 - 5x_3 + 7x_4 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 7x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases}$의 해공간의 차원은 2이다.
13. (F) 만일 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}, a_{n+2})$가 R^{n+2}의 영 아닌 벡터라면 $\dim(\mathbf{a}^\perp) = n$ 이다.
14. ( ) 만일 A가 $m\times n$ 행렬이고, rank가 k라면, $\dim(\mathrm{row}(A^TA)) = k$, $\dim(\mathrm{row}(AA^T)) = k$ 이다.
15. ( ) $T_1(x_1, x_2) = (3x_1 + x_2, x_1 - 2x_2)$, $T_2(x_1, x_2) = (-x_1, 5x_1 + x_2)$의 표준행렬은 각각 $[T_1] = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$, $[T_2] = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$ 이다.
16. ( ) R^3의 두 순서기저 $\epsilon = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$, $\beta = \{(1, 1, 1), (1, 2, 0), (0, 2, -3)\}$ 에 대하여
    $[\mathbf{x}]_\epsilon = P[\mathbf{x}]_\beta$와 $[\mathbf{x}]_\beta = P^{-1}[\mathbf{x}]_\epsilon$인 관계가 있다. 그럼 전이행렬 사이의 관계는 $\left([I]_\beta^\epsilon\right)^{-1} = [I]_\epsilon^\beta$ 이다.
17. (F) R^3의 부분공간인 평면 $x + 2y + 3z = 0$의 차원은 1이다.

Ⅱ. (3점x 4= 12점) State or Define

아래 중 본인에 맞는 난이도의 개념 4개를 골라 본인이 이해한 대로 아래 빈 공간에 간결 명확하게 서술하여라.

[부분공간], [2 step 부분공간 test], [1차 결합], [1차 결합들의 집합(U 의 span)], [1차 독립 (Linearly independence)], [1차 종속 (Linearly dependence)], [Vector공간], [Vector 공간의 기저 (basis)], [Vector 공간의 차원 (dimension)], [행렬의 행공간(row space)], [행렬의 계수 (rank)], [T 의 핵(kernel)], [층밀림(shear)변환], [Schur 정리], [동형사상(Isomorphism)], [Jordan 표준형],

1.

2.

3.

4.

Ⅲ. (3pt x 10 = 30pt) Find or Explain :

1. (Mid) 선형변환(선형연산자) $T : R^2 \to R^2$를 그림 6.2.6 같이 R^2상의 임의의 벡터 $\mathbf{x}$를 x축과 이루는 각이 θ인 원점을 지나는 직선에 정사영시키는 정사영변환으로 정의하자. 그리고 주어진 변환 T에 대응하는 표준행렬을 P_θ라 하면, 그림 6.2.7에서 보듯이 아래 관계 $P_\theta\mathbf{x}-\mathbf{x}=\frac{1}{2}(H_\theta\mathbf{x}-\mathbf{x})$ <방향은 같고 길이는 절반>를 갖는다. 따라서 위에서 구한 대칭이동의 행렬표현 $H_\theta=\begin{bmatrix}\cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta\end{bmatrix}$를 이용하여 P_θ를 구하여라.

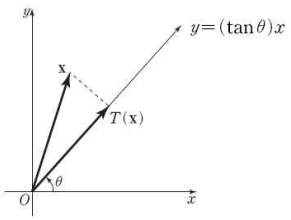


그림 6.2.6 기울기가 θ인 직선에 대한 정사영변환

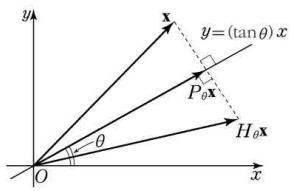


그림 6.2.7 기울기가 θ인 직선에 대한 대칭이동과 정사영변환과의 관계

(Sol) $P_\theta\mathbf{x}-\mathbf{x}=\frac{1}{2}(H_\theta\mathbf{x}-\mathbf{x})$ => $P_\theta\mathbf{x}=\frac{1}{2}H_\theta\mathbf{x}+\frac{1}{2}\mathbf{x}=\frac{1}{2}H_\theta\mathbf{x}+\frac{1}{2}I\mathbf{x}=\frac{1}{2}(H_\theta+I)\mathbf{x}$

$$\Rightarrow \quad P_\theta=\frac{1}{2}(H_\theta+I)=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}(1+\cos 2\theta) & \frac{1}{2}\sin 2\theta \\ \frac{1}{2}\sin 2\theta & \frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos^2\theta & \sin\theta\cos\theta \\ \sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta\end{bmatrix}$$

2. 임의의 벡터 $\mathbf{x}\in R^2$에 대하여 원점을 지나고 x축과 이루는 각이 θ인 직선에 정사영시키는 변환 $T : R^2 \to R^2$에 대하여 $\theta=\frac{\pi}{3}$일 때, $\mathbf{x}=\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$의 이미지 $T(\mathbf{x})$를 구하여라.

Ans $P_\theta\mathbf{x}-\mathbf{x}=\frac{1}{2}(H_\theta\mathbf{x}-\mathbf{x}) \quad \Rightarrow P_\theta\mathbf{x}=\frac{1}{2}(H_\theta\mathbf{x}+\mathbf{x}) \Rightarrow P_\theta\mathbf{x}=\frac{1}{2}(H_\theta+I)\mathbf{x}$

$P_\theta=\begin{bmatrix}\cos^2\theta & \sin\theta\cos\theta \\ \sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta\end{bmatrix}$ where $\theta=\frac{\pi}{3}$ at $\mathbf{x}=\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$

$$\therefore\ P_{\frac{\pi}{3}}\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.25 & 0.433 \\ 0.433 & 0.75\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}=1/4\begin{bmatrix}1+3\sqrt{3} \\ 9+\sqrt{3}\end{bmatrix}$$

3. 선형변환 $T(x, y, z)=(x+y, y+z, z+x)$의 (표준기저에 대한 행렬표현) 표준행렬 $[T]$를 구하여라.

Ans $T(\mathbf{e}_1)=(1,0,1),\ T(\mathbf{e}_2)=(1,1,0),\ T(\mathbf{e}_3)=(0,1,1) \quad \therefore [T]=[T(\mathbf{e}_1):T(\mathbf{e}_2):T(\mathbf{e}_3)]=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{bmatrix}$

4. 행렬 $\begin{bmatrix} b-a & a+b \\ b+a & a-b \end{bmatrix}$이 직교행렬이면 a, b는 어떤 조건을 만족해야 하는가?

Ans $\begin{bmatrix} b-a & a+b \\ b+a & a-b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b-a & b+a \\ a+b & a-b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(a^2+b^2) & 0 \\ 0 & 2(a^2+b^2) \end{bmatrix} = I$

그러므로 $a^2+b^2=0.5$ 이어야 한다.

5. 표준기저를 이용하여 다음 선형변환의 표준행렬 $[T]$ 를 구하여라.

$T(x, y, z) = (8x+11y-231z,\ 511x+8y+1z,\ -18x+731y-z)$

Ans $T(x, y, z) = (8x+11y-231z,\ 511x+8y+1z,\ -18x+731y-z)$

$T(\mathbf{e}_1) = (8, 511, -18)$,
$T(\mathbf{e}_2) = (11, 8, 731)$,
$T(\mathbf{e}_3) = (-231, 1, -1)$

$\therefore\ [T] = \begin{bmatrix} 8 & 11 & -231 \\ 511 & 8 & 1 \\ -18 & 731 & -1 \end{bmatrix}$ ■

6. 벡터가 $\mathbf{x} = (1, 3, 0, 4)$, $\mathbf{a} = (1, 0, 2, -1)$ 일 때 $\mathbf{x}$의 span$\{\mathbf{a}\} = <\mathbf{a}>$ 위로의 정사영 $\text{proj}_{<\mathbf{a}>}\mathbf{x} = \dfrac{1}{\|\mathbf{a}\|^2}\mathbf{a}\mathbf{a}^T\mathbf{x} = \dfrac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & -2 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \dfrac{1}{6}\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix}$

을 이용하여 선형변환 $T(\mathbf{x}) = \text{proj}_{<\mathbf{a}>}\mathbf{x}$의 표준행렬 P를 구하여라.

Ans 편의상 아래에 나오는 $\mathbf{x}, \mathbf{a}$를 모두 열벡터로 취급하면,

$T(\mathbf{x}) = \text{proj}_{<\mathbf{a}>}\mathbf{x} = P\mathbf{x}$

$P = \dfrac{1}{\mathbf{a}^T\mathbf{a}}\mathbf{a}\mathbf{a}^T = \dfrac{1}{1^2+2^2+(-1)^2}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}[1\ 0\ 2\ -1] = \dfrac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & -2 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

7. 선형변환 $T : R^2 \to R^2$는 우선 벡터를 2배로 확대하고, $y=x$에 대하여 대칭이동시킨 뒤에, x축으로 직교사영(정사형)시키는 변환이다. 이 변환의 행렬 표현은?

Ans $T : R^2 \to R^2$는 우선 벡터를 2배로 확대하는 선형변환: $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

$y=x$에 대하여 대칭이동시키는 선형변환: $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, x축으로 직교사영(정사영)시키는 선형변환: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

그러므로 선형변환 $T : R^2 \to R^2$는 우선 벡터를 2배로 확대하고, $y=x$에 대하여 대칭이동시킨 뒤에, x축으로 직교사영(정사영)시키는 변환은

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 이다. $\therefore [T] = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ■

8. 만일 A가 4×7 크기의 행렬이라 하자. 이 때 $\text{rank}(A^T)+\text{nullity}(A^T)$ 의 값은 무엇인가?

Sol) A의 크기가 4×7이라면, A^T의 크기는 7×4이다.

$\therefore\ \text{rank}(A^T)+\text{nullity}(A^T) = 4$ ■

9. 다음 R^4의 아래 부분집합은 직교집합이므로 일차독립이다, 이들을 정규직교화하여라.

$\{\mathbf{v}_1 = (1, -2, 1, -5), \mathbf{v}_2 = (2, 4, 16, 2),\ \ \mathbf{v}_3 = (4, -3, 0, 2)\}$

Ans $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0,\ \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_3 = 0,\ \mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{v}_1 = 0 \Rightarrow$ 직교집합이므로 일차독립이다.

$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$의 정규직교기저집합을 $\{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3\}$라 하면 $\{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3\} = \left\{\dfrac{\mathbf{v}_1}{||\mathbf{v}_1||}, \dfrac{\mathbf{v}_2}{||\mathbf{v}_2||}, \dfrac{\mathbf{v}_3}{||\mathbf{v}_3||}\right\}$이다.

$||\mathbf{v}_1|| = \sqrt{31}$, $||\mathbf{v}_2|| = 2\sqrt{70}$, $||\mathbf{v}_3|| = \sqrt{29}$ 이므로 $\therefore \mathbf{z}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{31}}(1, -2, 1, -5)$, $\mathbf{z}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{70}}(1, 2, 8, 1)$, $\mathbf{z}_3 = \dfrac{1}{\sqrt{29}}(4, -3, 0, 2)$ ■

10. $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ 일때 행렬 $U = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5}i \\ \frac{-4}{5} & \frac{3}{5}i \end{bmatrix}$에 대하여 $\|U\mathbf{x}\|$ 는?

Sol) $U^*U = I$ 이므로 $\|U\mathbf{x}\|^2 = <U\mathbf{x}, U\mathbf{x}> = \mathbf{x}^*U^*U\mathbf{x} = \mathbf{x}^*\mathbf{x} = \|\mathbf{x}\|^2 = (\sqrt{|1|^2+|0|^2})^2 = 1$

IV. (3점 x 7 = 21점) Explain or Fill the blank.

1. (Mid) 선형변환 $T : R^n \to R^m$에 대하여, $\mathrm{Im}\,T$는 R^m의 부분공간인 이유를 설명하여라.

(Pf) $\forall \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in \mathrm{Im}\,T,\ \exists \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in R^n \ni T(\mathbf{v}_1) = \mathbf{w}_1,\ T(\mathbf{v}_2) = \mathbf{w}_2$

1) [(Show 덧셈에 대해 닫혀있다) Show $\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \in \mathrm{Im}\,T$]

$\Rightarrow \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 = T(\mathbf{v}_1) + T(\mathbf{v}_2) = T(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)$ (1 pt)

$\Rightarrow \exists \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \in R^n \ni T(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \in R^m$ (1 pt)

$\therefore \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \in \mathrm{Im}\,T$

2) [(Show 스칼라곱에 대해 닫혀있다) Show $k\mathbf{w}_1 \in \mathrm{Im}\,T$]

$\forall k \in R,\ k\mathbf{w}_1 = kT(\mathbf{v}_1) = T(k\mathbf{v}_1)$ (1 pt)

$\Rightarrow \exists k\mathbf{v}_1 \in R^n \ni T(k\mathbf{v}_1) = k\mathbf{w}_1 \in R^m$ (1 pt)

$\therefore k\mathbf{w}_1 \in \mathrm{Im}\,T$

$\therefore \mathrm{Im}(T)$는 R^m의 부분공간이다. (1 pt) ■

2. R^3의 순서기저 $\beta = \{(1, 1, 1), (1, -1, 1), (1, 2, 2)\}$에 대하여 $\mathbf{y} = (6, 11, 9)$의 좌표벡터 $[\mathbf{y}]_\beta$는?

Ans $\mathbf{y} = c_1(1, 1, 1) + c_2(1, -1, 1) + c_3(1, 2, 2) = (6, 11, 9)$, $(c_i \in R)$에서

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 6 \\ c_1 - c_2 + 2c_3 = 11 \\ c_1 + c_2 + 2c_3 = 9 \end{cases}$$ 이므로

=> $c_1 = 4, c_2 = -1, c_3 = 3$ 이다. $\therefore [\mathbf{y}]_\beta = (4, -1, 3)$

■

3. $\alpha = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$, $\beta = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$가 R^2에서 기저라고 하고, $\mathbf{u}_1 = (1, 2), \mathbf{u}_2 = (2, 3), \mathbf{v}_1 = (1, 3), \mathbf{v}_2 = (1, 4)$ 일 때, 기저 α에 대해 $[\mathbf{w}]_\alpha = (1, 1)$일 때, $[I]_\alpha^\beta$를 이용하여 $[\mathbf{w}]_\beta = [I]_\alpha^\beta [\mathbf{w}]_\alpha$을 구하여라.

Ans $[\mathbf{w}]_\beta = [I]_\alpha^\beta [\mathbf{w}]_\alpha = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -4 \end{bmatrix}$ ■

4. 선형변환 $T(x, y, z) = (z, y, x)$에 대하여 표준기저와 순서기저 $\epsilon = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, $\alpha = \{(1, -1, 1), (1, -2, 1), (2, 1, -1)\}$

로부터 구한 행렬 $[I]_\alpha^\epsilon = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$와 $[I]_\epsilon^\alpha = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 1 & \frac{5}{3} \\ 0 & -1 & -1 \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$의 곱 $[I]_\alpha^\epsilon\ [I]_\epsilon^\alpha$은 무엇인가? Ans. $[I]_\alpha^\epsilon\ [I]_\epsilon^\alpha =$

5. 다음 행렬은 한 쌍의 복소수(켤레복소수) 고유값을 가진다. 이를 이용하여 $P^{-1}AP = D$를 만족하는 가역행렬 P와 행렬 D를 구하여라.

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 8 & -2 \end{bmatrix}$$

Ans) $|\lambda I_2 - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 6 & 4 \\ -8 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 20 = 0$이므로 두개의 서로 다른 고유값 $\lambda = 2 \pm 4i$ 을 가지므로, 대응하는 두 개의 일차독립인 고유벡터 $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1+i}{2} \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1-i}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$ 를 갖는다. 따라서 $P = \begin{bmatrix} \frac{1+i}{2} & \frac{1-i}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ 이고 $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2) = \begin{bmatrix} 2+4i & 0 \\ 0 & 2-4i \end{bmatrix}$일 때 $P^{-1}AP = D$ 이다. ■

6. 당신이 만약 연구소에 취직하여 4차 행렬 $A=\begin{bmatrix}4&1&0&2\\0&-1&2&0\\0&0&1&0\\0&4&0&3\end{bmatrix}$의 **고유값 , 고유벡터, 역행렬, rank, nullity, JCF** 를 구하라는 요청을 팀장에게 받았다면 어떻게 구할지 Step별로 빈칸에 상세하게 서술하여라.

Sol)

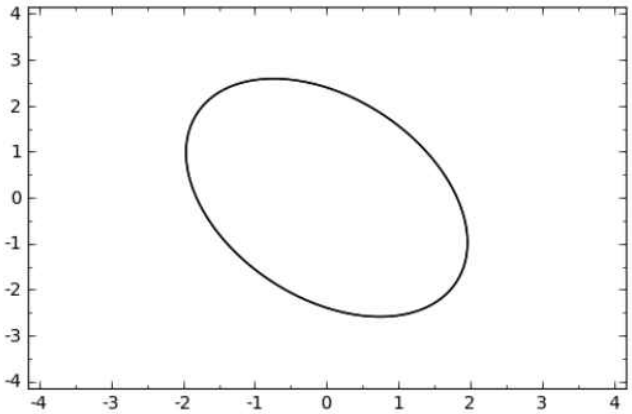
1) Step 1: (예) 인터넷에 접속하여 http://math1.skku.ac.kr 로 이동한다.
2) Step 2: ID= skku, PW = math를 입력하여 접속한다.
3) Step 3: "새 워크시트" 버튼을 누른다.
4) Step 4: 첫번째 셀에 CDF 형식으로 행렬 A를 다음과 같이 정의한다. **A=matrix(CDF,4,4,[4,1,0,2,0,-1,2,0,0,0,1,0,0,4,0,3])**
5) Step 5: 두번째 셀에 eigenvalues를 구하는 명령어 **A.eigenvalues()** 를 입력하고, 실행한다.
6) Step 6: 세번째 셀에 eigenvectors를 구하는 명령어 **A.eigenvectors_right** 를 입력하고, 실행한다.
7) Step 7: 네번째 셀에 역행렬을 구하는 명령어 **A.inverse()** 를 입력하고, 실행한다.
8) Step 8: 5번째 셀에 rank를 구하는 명령어 **A.rank()** 를 입력하고, 실행한다.
9) Step 9: 6째 셀에 nullity를 구하는 명령어 **A.right_nullity()** 를 입력하고, 실행한다.
10) Step 10: 10번째 셀에 Jordan 표준형을 구하는 명령어 A.jordan_form() 를 입력하고, 실행한다.

7. 방정식 $7x^2+4xy+4y^2-23=0$ 의 (x, -4, 4)와 (y, -4,4) 사이에서의 그래프 개형을 Sage로 그려라.

```
# 위의 Step 1), 2), 3) 에 이어,
var('x y')
f = 7*x^2 + 4*x*y + 4*y^2-23

implicit_plot(f, (x, -4, 4), (y, -4,4))
```

($x'y'$-좌표축은 xy-좌표축을 시계방향으로 63.435° 만큼 회전한 축이고,
주어진 식은 새 좌표축에서는 아래 모양의 타원이다.)



■

(Bonus) Contemporary Linear Algebra with Sage 강의에서 새롭게 배운 내용, 향상된 능력 또는 담당교수에게 하고 싶은 말.

Have a nice summer!!