(2005/12/19 19:30시~20:30) **성균관대 선형대수학 Final 종합시험** [채점용답안]

담당교수: 학과(학부) 학번: 이름: 확인: 점수

I. (3*10=30점) 맞으면 (T)를 틀리면 (F)를 쓰시오. 단, 주어진 모든 행렬들은 n차 정방행렬들이다.

(T) 1. A와 B가 닮은(similar) 행렬이면 같은 고유값들을 갖는다.

(F) 2. A가 대칭행렬이면 n개의 서로 다른 실수인 고유값을 갖는다.

(F) 3. 집합 $\{(1,0,0,-1),(1,2,-1,1),(0,-1,2,0)\}$은 직교집합이다.

(T) 4. 행렬 A, B가 가역이고 $AB=BA$이면 $AB^{-1}=B^{-1}A$이다.

(F) 5. A가 직교행렬이면 $|A|=1$ 이다.

(T) 6. 선형변환 $T: R^n \to R^n$ 가 단사이고 $T(\mathbf{u}-\mathbf{v})=\mathbf{0}$ 이면 $\mathbf{u}=\mathbf{v}$ 이다.

(T) 7. 행렬 A의 하나의 고유값 λ_i에 대응하는 고유공간은 $(A-\lambda_i I)\mathbf{x}=\mathbf{0}$의 해공간이다.

(T) 8. $S=\{\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v}_k\}$ 이 R^n 을 생성하면, $k \ge n$ 이다.

(T) 9. 행렬 A의 고유값 중 0인 것이 포함되면 A는 비가역행렬이다.

(T) 10. R^n 상에는 일차종속이며 동시에 정규직교인 벡터들의 집합은 존재하지 않는다.

II. (5점) 다음 중 하나를 골라 정확히 서술하시오.

(1) Cramer 의 공식 (2) Laplace 여인자 전개식

(3) 정사영정리 (4) Rank-Nullity 정리

(5) Gram-Schimidt 정규직교화과정

교재 참고

III. (10*10=100점) Find 또는 Prove.

1. 행렬 $A=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$에 대하여 $\det(A)=5$ 일 때, 다음을 구하시오. $\det\begin{bmatrix} a_1-2b_1 & a_2-2b_2 & a_3-2b_3 \\ -4c_1 & -4c_2 & -4c_3 \\ 3b_1 & 3b_2 & 3b_3 \end{bmatrix}$

행렬식의 성질을 이용하면 다음과 같다:

$-(-4)(3)\det(A)=60$

2. 특성방정식이 $p_A(\lambda)=\lambda(\lambda+1)(\lambda-2)^2(\lambda+3)^5$ 인 행렬 A의 크기와 각 고유값에 대한 대수적 중복도는?

(1) 행렬 A의 크기=1+1+2+5=9

(2) 고유값 λ의 대수적 중복도를 $m(\lambda)$라 하면 다음과 같다:

$m(0)=1, \quad m(-1)=1,$

$m(2)=2, \quad m(-3)=5$

3. 행렬 $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 9 & 0 & 7 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 8 \\ 2 & 2 & 8 & -3 & 5 \end{bmatrix}$ 의 rank를 구하고, (A의 열들로 이루어진) A의 열공간의 기저를 하나 구하시오.

$\mathrm{REF}(A)=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$이므로 A의 rank는 3이고, A의 열공간의 기저는 다음과 같다:

$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 9 & 0 & 7 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 8 \\ 2 & 2 & 8 & -3 & 5 \end{bmatrix}$ 의 1,2,4열 $\left\{\begin{bmatrix}1\\3\\2\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\4\\3\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\0\\1\\-3\end{bmatrix}\right\}$이다.

(별해) A의 열공간은 A^T 의 행공간과 같으므로 A^T 의 RREF를 구하면 다음과 같다: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 따라서 A의 열공간의 기저는 $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$

4. 다음 선형변환 T의 핵(kernel)을 구하여 T가 단사인지 아닌지를 결정하시오.

$T(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_3,\ 2x_2+x_3,\ 5x_3)$

$\ker(T)=\{\ \mathbf{x}\in R^3 \mid T(\mathbf{x})=\mathbf{0}\ \}$

$=\left\{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\in R^3 \mid x_1-x_3=0, 2x_2+x_3=0, 5x_3=0\right\}$

$=\{(0,0,0)\}$

이므로 T 는 단사이다.

5. $\mathbf{x}_1=(1,1,0)$, $\mathbf{x}_2=(-1,0,1)$일 때 Gram-Schmidt 정규직교화 과정을 이용하여 집합 $S=\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}$를 기저로 갖는 R^3 의 부분공간 W 의 정규직교기저 $Z=\{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2\}$를 구하시오.

$\mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_1 = (1,1,0)$

$$\mathbf{y}_2 = \mathbf{x}_2 - \mathrm{proj}_{W_1}\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_2 - \frac{\mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{y}_1}{\|\mathbf{y}_1\|^2}\mathbf{y}_1$$

$$=(-1,0,1)-\left(-\frac{1}{2}\right)(1,1,0)=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right)$$

$$\therefore\ \mathbf{z}_1=\frac{\mathbf{y}_1}{\|\mathbf{y}_1\|}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right).$$

$$\mathbf{z}_2=\frac{\mathbf{y}_2}{\|\mathbf{y}_2\|}=\left(-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$$

6. 선형변환 $T: R^2 \to R^3$ 를

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} 2x+y \\ x-y \\ x+4y \end{bmatrix}$$

라 정의하고 R^2 와 R^3 의 순서 기저를 각각 $\alpha=\{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1\}$, $\beta=\{\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1\}$ 라 할 때, $A'=[T]_\alpha^\beta$ 를 구하시오.

$T(\mathbf{e}_2)=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$, $T(\mathbf{e}_1)=\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 이므로,

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}_\beta=\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}_\beta=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

따라서 $A'=[T]_\alpha^\beta=\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

7. 행렬 $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ 에 대하여 다음에 답하시오.

(1) A 가 대각화 가능한 이유는?

(2) A 를 대각화하는 행렬 P를 구하시오.

(3) A 를 대각화하시오.

(1) A 의 고유값이 1, -1, 2 로서 3개가 모두 다르므로 A 는 대각화가능하다.

(2) $P=\begin{bmatrix} 1 & -1 & \frac{13}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$ (3) $P^{-1}AP=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

8. R^n 의 두 벡터 $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ 의 끝점을 지나는 직선을 매개방정식 $\mathbf{x}=(1-t)\,\mathbf{p}+t\,\mathbf{q}$ ($t\in R$) 로 정의한다.
$T: R^n \to R^n$ 가 선형변환일 때 $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ 를 잇는 선분 $(1-t)\,\mathbf{p}+t\,\mathbf{q}$ ($0\le t\le 1$)의 이미지는 선분임을 증명하시오. (특히 $T(\mathbf{p})=T(\mathbf{q})$ 이면 이미지는 한 점이 된다.)

T 가 R^n 상의 선형변환이므로 $0\le t\le 1$ 인 모든 t 에 대하여 다음과 같다:

$$T((1-t)\mathrm{p}+t\mathrm{q})=(1-t)\,T(\mathrm{p})+t\,T(\mathrm{q})$$

즉, 선분 $(1-t)\,\mathbf{p}+t\,\mathbf{q}$ 은 선형변환 T 에 의하여 그 이미지는 $T(\mathrm{p})$ 와 $T(\mathrm{q})$를 잇는 선분이다.

9. 행렬 A가 대각화 가능하면 행렬 A^n (단, n은 자연수)도 대각화 가능함을 보이시오.

행렬 A가 대각화 가능하므로 $P^{-1}AP=D$ 인 가역행렬 P 와 대각행렬 D 가 존재한다.
따라서 $A=PDP^{-1}$ 로부터 $A^n=PD^nP^{-1}$ 이므로 $P^{-1}A^nP=D^n$ 이다. 여기서 D^n 도 대각행렬이므로 $P^{-1}A^nP$가 대각행렬이 되게 하는 가역행렬 P 가 존재하므로 정의에 의하여 A^n 도 대각화 가능하다.

10. $T: R^n \to R^n$ 가 R^n 위의 선형변환이면 다음 두 명제는 동치임을 보이시오.

(1) $\|T(\mathbf{x})\|=\|\mathbf{x}\|$, $\mathbf{x}\in R^n$

(2) $T(\mathbf{x})\cdot T(\mathbf{y})=\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}$, $\mathbf{x}, \mathbf{y}\in R^n$

(1) $\Rightarrow$ (2): $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ 를 R^n 의 임의의 벡터라 하면,

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2=(\mathbf{x}+\mathbf{y})\cdot(\mathbf{x}+\mathbf{y})$$

$\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2=(\mathbf{x}-\mathbf{y})\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})$ 이므로,

$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}=\frac{1}{4}(\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2-\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2)$ 임을 알 수 있다.

따라서

$$T(\mathbf{x})\cdot T(\mathbf{y})=\frac{1}{4}(\|T(\mathbf{x})+T(\mathbf{y})\|^2-\|T(\mathbf{x})-T(\mathbf{y})\|^2)$$

$$=\frac{1}{4}(\|T(\mathbf{x}+\mathbf{y})\|^2-\|T(\mathbf{x}-\mathbf{y})\|^2)$$

$$=\frac{1}{4}(\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2-\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2)=\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}$$

(2) $\Rightarrow$ (1) :

$\|\mathbf{x}\|=\sqrt{\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}}$ 로 쓸 수 있으므로,

$$\|T(\mathbf{x})\|=\sqrt{T(\mathbf{x})\cdot T(\mathbf{x})}=\sqrt{\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}}=\|\mathbf{x}\|$$