

(2003. 6.12 12시~13시) Matrix Theory **행렬론 (Final)**

전공: 학년: 학번: Name :

I (2*9=18점)	II 3*8=24점	III 4*6=24점	VI 5*5=25점	V 9점	기타		합 (100점)
							채점용

I. 맞으면 (T) or 틀리면 (F) 표 하시오.

- (F) 1. 벡터들 $v_1 = (1, 1, 1, 1)$, $v_2 = (0, 1, 1, 0)$, $v_3 = (1, 0, 0, 1)$ 은 R^4 에서 1차 독립이다.
- (T) 2. 행렬 A 와 its row-echelon form U 에 대해 행공간은 $R(A) = R(U)$ 이다.
- (T) 3. Every permutation matrix 은 orthogonal 이다.
- (T) 4. 내적공간안의 orthogonal 한 nonzero 벡터들의 집합은 무조건 일차독립이다.
- (F) 5. 복소수체에서 n차 실수성분의 행렬 A가 오직 하나의 ((대수적)중복도 포함하여) 고유값만을 가질 수도 있다.
- (F) 6. If A and B 가 diagonalizable 이면, AB도 diagonalizable 이다.
- (F) 7. If B is obtained from A by interchanging two rows, then B is similar to A.
- (T) 8. Any square matrix is similar to a triangular matrix.
- (T) 9. A matrix A cannot be similar to $A + I$.

II. 아래 정의의 빈칸 채우시오.

- (1) Real valued 함수 $f: M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ 가 아래 3가지 성질을 만족하면 (The) **determinant** 함수라 한다: if (R1) $f(I) = 1$ (R2) 행렬의 행이 바뀌면 함수 f 값의 부호 가 바뀐다. (R3) f 는 첫째 행에 대한 선형 함수이다.
- (2) 행렬 $A = [T]_{\alpha}^{\beta}$ 를 “T의 matrix representation w.r.t basis α and β where $\alpha = \{ \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \}$ and $\beta = \{ \vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_n \}$ 이라 하고 $A = [T]_{\alpha}^{\beta} = [[T(\vec{v}_1)]_{\beta} \mid \dots \mid [T(\vec{v}_n)]_{\beta}]_{m \times n}$ 으로 구한다.
특히 $[Id]_{\alpha}^{\beta}$ 를 α 에서 β 로의 **transition** (or coordinate change) 행렬이라 한다.
- (3) Cauchy-Schwarz 부등식으로부터 $-1 \leq \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|} \leq 1$ 라는 부등식을 갖게 되며 따라서 $\cos \theta = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}$ 되는 유일한 수 $\theta \in [0, \pi]$ 를 \mathbf{u} 와 \mathbf{v} 사이의 **각도(angle, 사이각)**이라 한다.
- (4) 정리 (Gram-Schmidt 정규직교화 과정) 집합 $S = \{ \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m \}$ 을 기저로 갖는 R^n 의 영아닌 부분공간을 W 라 하자. 그러면 S 로부터 얻어진 정규직교기저 $T = \{ \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_m \}$ 가 W 에 존재한다. 여기서,

$$\mathbf{z}_i = \frac{\mathbf{y}_i}{\|\mathbf{y}_i\|}, \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad \text{이고}$$

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_1, \quad \mathbf{y}_2 = \mathbf{x}_2 - \text{proj}_{\langle \mathbf{y}_1 \rangle} \mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_2 - \frac{\langle \mathbf{x}_2, \mathbf{y}_1 \rangle}{\langle \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_1 \rangle} \mathbf{y}_1$$

$$\mathbf{y}_3 = \mathbf{x}_3 - \text{proj}_{\langle \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \rangle} \mathbf{x}_3 = \mathbf{x}_3 - \frac{\langle \mathbf{x}_3, \mathbf{y}_1 \rangle}{\langle \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_1 \rangle} \mathbf{y}_1 - \frac{\langle \mathbf{x}_3, \mathbf{y}_2 \rangle}{\langle \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_2 \rangle} \mathbf{y}_2$$

$$\dots\dots\dots \mathbf{y}_i = \mathbf{x}_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{y}_j \rangle}{\langle \mathbf{y}_j, \mathbf{y}_j \rangle} \mathbf{y}_j, \quad (i = 4, \dots, m)$$

(5) Full rank 갖는 A 에 대한 $Ax=b$ 의 normal equation은 $A^T Ax = A^T b$ 이다. -2쪽- 이 방정식의 the only least square solution 은 $x_s = (A^T A)^{-1} A^T b$ 이다.

그리고 b 의 A 의 column space C 상으로의 projection 벡터 b_c 는 $b_c = Ax_s$ 이다.

또, $b_c = Ax_s = A(A^T A)^{-1} A^T b$ 이다. 여기서 $P = A(A^T A)^{-1} A^T$ 를 the projection matrix for the subspace C of R^n 이라 한다

(6) (실)직교행렬은 $AA^T = I_n = A^T A$ 이고 유니타리행렬 은 $AA^* = I_n = A^* A$ 이다. 여기서 A의 켈레전치행렬(conjugate transpose) A^* 는 $A^* = \overline{A}^T = [\overline{a_{ji}}]_{n \times n}$ 이다.

(7) λ_i 가 A의 고유값일 때 동차연립방정식 $(\lambda_i I_n - A) \mathbf{x} = \mathbf{0}$ 의 해공간을 λ_i 에 대응하는 A의 - 고유공간(eigenspace) 이라고 한다. 이는 λ_i 에 대응하는 A의 고유벡터들에 의하여 생성되는 공간이다. 이 벡터공간의 차원을 λ_i 에 대한 기하적중복도(geometric multiplicity)라 한다.

(8) (Schur 정리를 서술하시오) 임의의 n 차의 정사각행렬은 n 개의 (고유값) 을 대각선 성분으로하는 (상 삼각행렬) 과 유니타리 닮음이다.

III. Find or 빈칸을 채워라.

1. Let $f(x)$ and $g(x)$ be continuous real-valued functions on $[0,1]$ 일 때, 벡터공간 $C([0,1])$ 에서 내적을 $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$ 로 정의하면 $\left[\int_0^1 f(x)g(x)dx \right]^2 = \langle f, g \rangle^2$ 이고

$$\left[\int_0^1 f^2(x) dx \right] \left[\int_0^1 g^2(x) dx \right] = \langle f, f \rangle \langle g, g \rangle \text{ 이므로}$$

Cauchy-Schwarz 의 부등식 ($|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|$) 에 의해

$$\langle f, g \rangle^2 \leq \langle f, f \rangle \langle g, g \rangle \text{ 이고 따라서}$$

$$\left[\int_0^1 f(x)g(x)dx \right]^2 \leq \left[\int_0^1 f^2(x) dx \right] \left[\int_0^1 g^2(x) dx \right] \text{ 이다.}$$

2. Find the volume of the three-dimensional tetrahedron in R^4 whose vertices are at $(0, 0, 0, 0)$, $(1, 0, 0, 0)$, $(0, 1, 2, 2)$ and $(0, 0, 1, 2)$.

풀 이 $A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 6 \\ 0 & 6 & 5 \end{bmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 6 \\ 0 & 6 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = 45 - 36 = 9$

$$\text{Vol}(A) = \frac{1}{3} \sqrt{\det(A^T A)} = \frac{1}{3} \sqrt{9} = \frac{1}{3} \times 3 = 1 \quad \therefore \text{vol}(A) = 1$$

3. Find an orthogonal matrix Q and a Jordan Canonical Form J such that $Q^T A Q = J$ for

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 2 & -6 & 2 \\ 4 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

Solve) $\det(\lambda I_3 - A) = (\lambda - 2)(\lambda + 7)^2$. 고유값은 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -7$ 이다.

i) $\lambda_1 = 2$ 에 대응하는 고유벡터는 $(\lambda_1 I_3 - A) \mathbf{x} = \mathbf{0}$, $\mathbf{x}_1 = (2, 1, 2)$ 이고,

정규화하면 $\mathbf{z}_1 = \frac{\mathbf{x}_1}{\|\mathbf{x}_1\|} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$ 이다. -3쪽-

ii) $\lambda_2 = -7$ 에 대응하는 고유벡터는 $(\lambda_2 I_3 - A) \mathbf{x} = \mathbf{0}$ 에서 $x_1 = t, x_2 = -2t - 2s, x_3 = s$

이고 $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ 이고 Gram-Schmidt 정규직교화과정을 이용하면

$$\mathbf{z}_2 = \frac{\mathbf{x}_2}{\|\mathbf{x}_2\|} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{z}_3 = \frac{\mathbf{x}_3 - (\mathbf{x}_3 \cdot \mathbf{z}_2) \mathbf{z}_2}{\|\mathbf{x}_3 - (\mathbf{x}_3 \cdot \mathbf{z}_2) \mathbf{z}_2\|} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

따라서 직교행렬은

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \text{이고, Jordan Canonical Form } J \text{는 } Q^T A Q = J \text{ 만족하고, 고유값을 대}$$

각선 성분으로 갖는 $J = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}$ 이다.

4. Calculate $A^{10} \mathbf{x}$ for $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & 6 & -2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}$. 참고로 $P^{-1} A P = D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ 를 만족하

는 가역행렬 P 는 $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ 이고 $[P : I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & : & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & : & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & : & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & : & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & : & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & : & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ 이

다. $A^{10} = P D^{10} P^{-1} =$

$$= P \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1024 \end{bmatrix} P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1024 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1024 \\ 0 & 1 & 2048 \\ 0 & 2 & 3 \cdot 1024 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2046 & -1023 \\ 0 & 4093 & -2046 \\ 0 & 6138 & -3068 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^{10} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2046 & -1023 \\ 0 & 4093 & -2046 \\ 0 & 6138 & -3068 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1025 \\ 2050 \\ 3076 \end{bmatrix}$$

5. Find a full set of generalized eigenvectors 와 Jordan 표준형 of $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

Sol) $\det(A - \lambda I) = -\lambda(\lambda + 1)^2 = 0 \quad \therefore \lambda_1 = \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 0$ 으로 놓자.

① $\lambda = -1$ (중복도 2) $A - \lambda I = A + I = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$\text{rank}(A+I)=2$ (A의 두 번째 행은 첫 번째 행과 세 번째 행의 일차 결합으로 나타내 질 수 있고, 첫 번째 행과 두 번째 행은 일차 독립)

$$(A+I)^2 \mathbf{x} = \mathbf{0} \text{ and } (A+I) \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$$

$$(A+I) \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x-2z \\ -x+2y-2z \\ y \end{bmatrix} \neq \mathbf{0}$$

$$(A+I)^2 \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad \text{-4쪽-}$$

행렬 $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$ 의 RREF는 $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 이므로

$x-2y+2z=0$ 이라는 조건을 얻을 수 있다.

여기에 $y \neq 0$ 이란 조건을 함께 고려해서 $\lambda = -1$ 에 대한 generalized eigenvector 의 하나로 $\mathbf{x}_2 = (0, 1, 1)$ 을 택할 수 있다.

따라서

$$\mathbf{x}_1 = (A+I) \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \mathbf{x}_1 = (-2, 0, 1), \mathbf{x}_2 = (0, 1, 1)$$

② $\lambda = 0$ 경우 고유벡터는 $\therefore \mathbf{x} = t(-1, 1, 1) (t \in \mathbb{R})$ 따라서 $\mathbf{x}_3 = (-1, 1, 1)$

\therefore a full set of generalized eigenvectors of A is

$$\{\mathbf{x}_1 = (-2, 0, 1), \mathbf{x}_2 = (0, 1, 1), \mathbf{x}_3 = (-1, 1, 1)\} \text{ and JCF 는 } J_A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

6. JCF 정리 7.11은 $r_1 = n - \text{rank}(A - \lambda_i I)$ 이고, 만일 $j > 1$ 에 대해,

$r_j = \text{rank}((A - \lambda_i I)^{j-1}) - \text{rank}((A - \lambda_i I)^j)$ 라 하면 λ_i 에 대한 점 도표는 r_j 에 의하여 완전히 결정됨을 보여준다. 이제 주어진 15차 행렬 A 의 특성방정식이

$\det(A - \lambda I) = (\lambda - \lambda_i)^9 (\lambda - 2)^6$ 이면 λ_i 에 대한 9x9 Jordan 표준행렬 A_i 는 그 안의 Jordan block의 개수인 수 l 과 각 Jordan block의 크기들에 의하여 완전하게 결정된다. 즉, A_i 에 대해 $r_1 = 4, r_2 = 3, r_3 = 1, r_4 = 1$ 라면 그 λ_i 에 대한 점 도표를 그리고

•	•	•	•	
•	•	•		
•				
•				

Jordan 표준형 J_{A_i} 를 주어라 .

$$J_{A_i} = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_i & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}_{9 \times 9}$$

Review (3학년 이상만 : -5 ~ 1점) 다음 미분방정식을 풀어라

-5쪽-

$$x^{(3)} - 2x'' - 5x' + 6x = 0 \quad (11)$$

풀이

계수행렬

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & 5 & 2 \end{bmatrix} \text{의}$$

고유값은

$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 3$ 이므로 A 는 대각화가능하고, 고유값에 대응하는 고유벡터는 각각

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix} \text{ 이다. 따라서 } \mathbf{x}' = A\mathbf{x} \text{ 의 일반해는 정리 6.7에 의}$$

하여

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^t + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} e^{-2t} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix} e^{3t}$$

이고, 식 (11)의 일반해는 $x = x_1$ 이므로 다음과 같다.

$$x(t) = x_1(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-2t} + c_3 e^{3t} \quad \blacksquare$$

IV. Prove or 빈칸을 채워라.

1. 복소내적공간 V 의 임의의 벡터 \mathbf{u}, \mathbf{v} 에 대하여 다음이 성립한다.

$$|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \quad (\text{Cauchy-Schwarz 부등식})$$

증명 $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ 이면 trivial. 만일 $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ then $\mathbf{p} = \text{proj}_{\langle \mathbf{u} \rangle} \mathbf{v} = t\mathbf{u} = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle}{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle} \mathbf{u}$ 일때

$\mathbf{w} = \mathbf{v} - \mathbf{p}$ 라 놓으면 $\langle \mathbf{w}, \mathbf{p} \rangle = 0$ 이다.

$$0 \leq \langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} - \mathbf{p} \rangle = \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle - \langle \mathbf{w}, \mathbf{p} \rangle$$

$$= \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v} - \mathbf{p}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle - \langle \mathbf{p}, \mathbf{v} \rangle$$

$$= \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle - t \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle - \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle}{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle} \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$$

$$\therefore \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \geq \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$$

$$\therefore \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 \geq \overline{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle} \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle\|^2 \quad \square$$

2. 다음 if A is an idempotent matrix, then $\text{tr}(A) = \text{rank}(A)$ 의 증명을 마무리 하시오. .

증명) 우선 A 가 an idempotent matrix 이므로 정사각행렬이다.

A를 $n \times n$ 행렬로 놓으면 $tr(A) = a_{11} + \dots + a_{nn} = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$ 이다.

\therefore A의 고유값을 $\lambda_i (i=1, \dots, n)$ 라 놓으면 $\lambda_i = 0$ or $\lambda_i = 1 (i=1, \dots, n)$. 그러므로 $tr(A)$ 는 영아닌 고유값들의 개수 이다. 이것이 바로 랭크의 정의와 일치한다. 랭크는 REF 의 leading nonzero 의 개수 , 즉 nonzero 고유값의 개수와 같은 것임을 이미 배운 바 있다. 그런데 0 아닌 모든 고유값은 1이므로 그 개수가 바로 그 합인 대각합 $tr(A)$ 와 같아 진다는 것이다. (증명 끝)

3. Show $A \cdot adjA = (detA)I_n$.

$$(A \cdot adjA)_{ij} = A_{(i)adj(A)}^{(j)} = \sum_{k=1}^n a_{ik}A_{jk} = \delta_{ij} \cdot detA$$

$$\Rightarrow A \cdot adjA = \begin{bmatrix} detA & 0 & \dots & 0 \\ 0 & detA & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & detA \end{bmatrix} = (detA)I$$

4. n 차의 정사각행렬 A 가 대각화 가능할 필요충분조건은 A 가 n 개의 일차독립인 -6 쪽- 고유벡터를 갖는 것이다. (이 때, A 는 자신의 고유값 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ 을 주대각선성분으로 갖는 대각선행렬 D 와 닮은행렬이다.)

증명 (\Rightarrow) (You know it!)

(\Leftarrow) A 의 고유값 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 에 대응하는 일차독립인 고유벡터를

$$\mathbf{p}^{(1)}, \mathbf{p}^{(2)}, \dots, \mathbf{p}^{(n)}$$

이라 하고 이것을 열벡터로 갖는 행렬을

$$P = [\mathbf{p}^{(1)} \ \mathbf{p}^{(2)} \ \dots \ \mathbf{p}^{(n)}] \quad \text{이라 하자. 그러면}$$

$$\begin{aligned} AP &= [A\mathbf{p}^{(1)} \ A\mathbf{p}^{(2)} \ \dots \ A\mathbf{p}^{(n)}] \\ &= [\lambda_1\mathbf{p}^{(1)} \ \lambda_2\mathbf{p}^{(2)} \ \dots \ \lambda_n\mathbf{p}^{(n)}] \\ &= [\mathbf{p}^{(1)} \ \mathbf{p}^{(2)} \ \dots \ \mathbf{p}^{(n)}] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \\ &= PD \end{aligned}$$

그런데 P 의 열벡터들은 일차독립이므로 P 는 가역이다. 따라서

$$P^{-1}AP = D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

이고 A 는 대각화 가능하다. □

5. For $m \times n$ A , $rank(A^T A) = rank A$.

증명 Rank-Nullity 정리에 의해 null space $N(A^T A) = N(A)$ 임을 보이면 된다.

(\Rightarrow) For all x in $N(A^T A)$ $\Rightarrow A^T Ax = 0 \Rightarrow \langle Ax, Ax \rangle = x^T A^T Ax = x^T 0 = 0. \Rightarrow Ax = 0$
 $\Rightarrow x$ in $N(A)$

(\Leftarrow) For all x in $N(A)$ $\Rightarrow Ax = 0 \Rightarrow A^T Ax = 0 \Rightarrow x$ in $N(A^T A)$

따라서 $N(A^T A) = N(A)$.

(증명 끝)

V. (9점) 참여 점수

- 1.(3점) 본인이 그간 Q&A, 동료학생, “행렬론”강좌등에 기여한 내용을 간단히 서술하세요!
2. (3점) 본인이 완성한 프로젝트의 내용과 그 과정에서 느낀 점을 서술하시오
3. (3점) 우리의 자기 주도적인 Belended learning(both on and offline learning)에서 배운 점이나 기타 하고픈 얘기를 서술하세요! **-한 학기 수고 많았어요! 좋은 여름 가지기 바래요!**