(2004. 6.16 10:30~11:30) Matrix Theory 행 렬 론 (Final)

전공:　　　　학년:　　학번:　　　　　　　　Name :

****

I (5*5=25)	II (5*5=25)	III (5*7=35)	VI 10	V 5	발표		합 (100점)

I. Find or State

1. determinant 함수 $f: M_n(\mathrm{R}) \to \mathrm{R}$ 가 만족하는 3가지 성질을 서술하시오.

if (1)

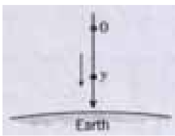
(2)

(3)

2. REF를 이용하여 행렬 A의 열공간의 기저를 찾는 법을 설명하시오!

3. 행렬의 대각화에 대해 설명하시오.

4. 물리학의 Newton의 제 2법칙에 따르면 지구상의 물체가 지상으로 낙하할 때 다음과 같은 방정식을 만족하며 떨어진다고 한다.



$$y = y_0 + v_0 t + \frac{1}{g} t^2$$

여기서 y_0 는 물체의 최초의 높이, v_0 는 떨어지기 시작할 때의 속도, g 는 중력가속도를 의미한다. t 는 시간, y 는 시간 t 에 따른 높이를 의미한다. 이 시스템에서 다음과 같은 관계로 물체가 떨어질 경우, least squares solution을 구하기 위한 Normal system을 표현하시오.

(참고로 위로부터 M, $\mathbf{v}$, $\mathbf{y}$ 는 아래와 같다.)

$$M = \begin{bmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 \\ 1 & t_2 & t_2^2 \\ 1 & t_3 & t_3^2 \\ 1 & t_4 & t_4^2 \\ 1 & t_5 & t_5^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.10 & 0.01 \\ 1 & 0.20 & 0.04 \\ 1 & 0.30 & 0.09 \\ 1 & 0.40 & 0.16 \\ 1 & 0.50 & 0.25 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} y_0 \\ v_0 \\ \frac{1}{2} g \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.18 \\ 0.31 \\ 1.03 \\ 2.48 \\ 3.73 \end{bmatrix}$$

5. Compute the angle between the vectors (4,7,9,1,3) and (2,1,1,6,8) in R^4 (solve)

II. Show

1. (수업-퀴즈) : Cayley 가 보인 Determinant의 Multiplicative 성질

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

(Proof을 마무리 하시오)

1) If A is singular, then AB is also singular.

So $\det(AB) = 0 = \det(A)\det(B)$.

2) If A is nonsingular, then $A = E_n \cdots E_2 E_1$, a product of elementary matrices

Hence , $\det(AB) = \det(E_n \cdots E_2 E_1 B)$

2. V, W 가 벡터공간이고 $T: V \to W$ 을 선형변환이라 하면 kerT 은 V의 부분공간임을 보이시오. (이 $\ker T$을 **핵공간**이라 부른다.)

증명

4. A가 $m \times n$ 행렬일 때, 선형변환 $T: R^n \to R^m$ 을 $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ 로 정의하면 $\operatorname{Im} T$은 행렬 A의 열공간 임을 보여라.

증명

5. Cauchy-Schwarz 부등식을 그림을 그려 증명하시오.

복소내적공간 V 의 임의의 벡터 $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ 에 대하여 다음이 성립한다.

$$|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \le \|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\| \qquad \text{(Cauchy-Schwarz 부등식)}$$

증명

III. Explain

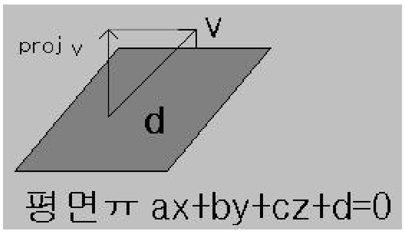
1. 선형변화의 행렬 표현에 대하여 아는대로 서술하시오.

2. 3차원 공간 R^3 안의 부분집합 $W = \{(x, y, z) : x + y + z = 0\}$ 의 차원이 2임을 설명하고, 하나의 기저를 구하시오!

3. 세 점 (0,0), (x_1, y_1) , (x_2, y_2) 이 이루는 평면상의 삼각형 OAB의 면적이

$A = \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$ 임을 이용하여, 세 vector (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3)가 만드는 삼각형의 면적은 $\pm \frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix}$ 임을 그림을 그려서 설명하시오.

4. 점 $P_0(x_0, y_0, z_0)$와 평면 π : $ax + by + cz + d = 0$ 사이의 거리 D가 $\dfrac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ 임을 그림을 중심으로 간단히 설명하시오.



5. 선형변환에 대한 Rank-Nullity 정리의 증명을 스케치하시오.

임의의 선형변환 $T: R^n \to R^m$에 대하여 다음이 성립한다.

$$\text{rank}(T) + \text{nullity}(T) = n = \dim(\text{Domain})$$

(증명을 마무리 지으시오)

i) $\text{rank}(T) = \{0\}$ 이면, $\ker T = R^n$ 이고 따라서 o + n = n 이므로, 위의 정리가 성립한다.

ii) $\text{rank}(T) \neq \{0\}$ 인 경우, $\text{nullity}(T) = k$라 놓자, 이 때 { $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_k$}를 $\text{Ker}(T)$의 기저라 놓으면,

6. Schur 정리에 내용과 증명을 스케치 하시오.

7. Jordan 표준형에 대해 아는 바를 서술하시오.

IV. (10점) (한 학기 수고 많았어요!) 참여 확인 및 Project (Term paper):

(1) 본인이 Q&A와 토론등에 참여한 대략의 회수는?

(2) 본인이 Q&A에서 한 질문이나 답 중 특히 기억나는 하나를 서술하시오

(3) 프로젝트 초안을 언제 어떻게 제출했나요?

(4) 프로젝트의 수정본을 언제, 어떻게 제출했나요?

(5) 프로젝트를 수행(하고 발표- 개인별 포함)하면서 느낀 점을 서술하시오!

V. (5점) 본인이 이번 PBL 강좌에서 담당 교수의 강의, 콘텐츠, 강의실 환경, 반복 학습자료, 참고자료, Q&A,등을 통하여 배운 점 중 기억나는 것을, 본인의 생각과 함께 서술하시오.