2004년 1학기 "Matrix Theory(행렬론)" 중간고사 채점용답안 April. 21

전공: 학년: 학번: Name : 성적: /90 + /10 = /100

*******************************************************************************

I. 맞으면 (T) or 틀리면 (F) 표 하시오. 2*9 = 18 점

( F ) 1. $\{\cos^2 x, \sin^2 x, 1, e^x\}$ 은 벡터공간 $C(R)$ 에서 일차독립이다.

Sol) $c_1 = 1, c_2 = 1, c_3 = -1, c_4 = 0$이라면

$c_1 \cos^2 x + c_2 \sin^2 x + c_3 + c_4 e^x = 0$이 성립한다.

하지만 $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 \neq 0$ 이므로 $\{\cos^2 x, \sin^2 x, 1, e^x\}$ is not linearly independent.

( F ) 2 $\{A \in M_{n\times n}(R) \mid A^T = A^{-1}\}$은 벡터공간 $M_{n\times n}(R)$의 부분공간이다.

Sol) Let $D = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A^T = A^{-1}\} \subseteq M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

Let $A, B \subseteq D$

① 덧셈에 관하여 닫혀있는지 보자

$(A+B)^T = A^T + B^T$ but

$(A+B)^{-1} \neq A^{-1} + B^{-1} = A^T + B^T$

$\therefore A + B \not\in D$

② [Show: scalar 곱셈에 닫혀있다.]

$(kA)^{-1} = \frac{1}{k} A^{-1} \neq (kA)^T = kA^T$

$\therefore kA \notin M_{n\times n}(R)$

덧셈과 곱셈에 닫혀있지않다(not a subspace)

Ans : $\therefore$ False.

( F ) 3. If $U$ and $W$ are subspaces of a vector space $V$ with bases $\alpha$ and $\beta$ respectively, then the intersection $\alpha \cap \beta$ is a basis for $U \cap W$.

답: No

(반례) Let $\alpha = \{c_1, c_2\}, \beta = \{c_2 + c_3, c_3\}$

$\rightarrow \alpha \cap \beta = \varnothing$ and $U \cap W$ is not empty set.

$\therefore$ False!

( F ) 4. Any two-equivalent matrices have the same column space.

답: No (False)

$E_k E_{k-1} \cdots E_2 E_1 A = B$

A와 B는 행동치이므로 $R(A) = R(B)$.

그러나 $R(A) \neq C(A)$이다.(단지 dim이 같을 뿐이다.)

( T ) 5. For any $m \times n$ matrix A, $\dim C(A) + \dim N(A^T) = m$

Sol) (p.101 Coro 3.17)

pf) $\dim C(A) + \dim N(A^T) = m$

= $\dim R(A^T) + \dim N(A^T) = m$

$REF(A^T)$ 에서 free variable + basic variable = m이다

$\dim R(A^T)$ (basic variable의 개수)+ $\dim N(A^T)$(free variable의 개수)

$= m$ ( $A^T$ 의 col의 개수)

∴ $\dim C(A) + \dim N(A^T) = m$

∴ True

( T ) 6. A linear transformation $T: R^n \to R^m$ is one-to-one if and only if the nullspace of $[T]_\alpha^\beta$ is {0} for any basis $\alpha$ for $R^n$ and any basis $\beta$ for $R^m$.

Yes.

matrix presentation of T w.r.t $\alpha$ and $\beta$ 가 A 라 하면

$\vec{x} \in R^n, \vec{b} \in R^m \Rightarrow A\vec{x} = \vec{b} = T(\vec{x})$ = $[T]_\alpha^\beta \vec{x}$

(=>) $T: R^n \to R^m$ is one-to-one => $A\vec{x} = \vec{0}$ 가 유일해 $\vec{0}$ 을 갖는다. 따라서 the nullspace of $[T]_\alpha^\beta$ 는 {0} 이다.

(<=) For 임의의 기저 $\alpha$ for $R^n$ 와 $\beta$ for $R^m$ 에 대해, $T(x) = T(y) =>$ $T(x-y) = 0$ 이고 the nullspace of $[T]_\alpha^\beta$ 는 {0} 이므로 $x - y = 0$ and $x = y$ , 즉, $T$ 는 one-to-one 이다.

( T ) 7. If a linear transformation $T: R^n \to R^n$ is one-to-one, then any matrix representation of $T$ is nonsingular.

Yes $T: R^n \to R^n$ is one-to-one => $T(\vec{x})$ = $A\vec{x} = \vec{0}$ 가 유일해 $\vec{0}$ 을 갖고 A 는 정사각행렬이다. 따라서 A 는 Full rank를 갖고, nonsingular 이다.

참고 : $T: R^n \to R^m$ 일 경우는 A 는 정사각행렬이 아닐 수 잇기 때문에 가역성을 애기 못한다.

( T ) 8. Any $m \times n$ matrix A can be a matrix representation of $T: R^n \to R^m$.

( T ) 9. $R^3$안의 벡터들 $v_1 = (1,2,1), v_2 = (2,9,0)$ , $v_3 = (3,3,4)$ 의 집합 S는 기저를 이룬다.

i ) [Show L・I]

$a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 = 0$ then

$\Leftrightarrow a_1(1,2,1) + a_2(2,9,0) + a_3(3,3,4) = 0$

$\Leftrightarrow (a_1 + 2a_2 + 3a_3, 2a_1 + 9a_2 + 3a_3, a_1 + 4a_3) = 0$

$\Leftrightarrow a_1 + 2a_2 + 3a_3 = 0, \quad 2a_1 + 9a_2 + 3a_3 = 0, \quad a_1 + 4a_3 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 9 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} \qquad -2R_1 + R_2 \to R_2, -R_1 + R_3 \to R_3$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \frac{2}{5}R_2+R_3 \to R_3$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ $a_1=0$, $a_2=0$, $a_3=0$

ii) Show <S> = $R^3$

For any $X=(x_1, x_2, x_3)$ in $R^3$, [Show $\exists$ $a_1$, $a_2$, $a_3$ s.t. $a_1v_1+a_2v_2+a_3v_3=X$]

(증명)

$$a_1(1,2,1)+a_2(2,9,0)+a_3(3,3,4)=(x_1, x_2, x_3)$$

$$\Leftrightarrow a_1+2a_2+3a_3=x_1, \quad 2a_1+9a_2+3a_3=x_2, \quad a_1+4a_3=x_3$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & x_1 \\ 2 & 9 & 3 & x_2 \\ 1 & 0 & 4 & x_3 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & x_1 \\ 0 & 5 & -3 & -2x_1+x_3 \\ 0 & -2 & 1 & -x_1+x_3 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & x_1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & \frac{-2x_1+x_3}{5} \\ 0 & -2 & 1 & -x_1+x_3 \end{array}\right] \to$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & x_1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & \frac{-2x_1+x_3}{5} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{-9x_1+2x_2+5x_3}{5} \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & x_1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & \frac{-2x_1+x_3}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 9x_1-2x_2-5x_3 \end{array}\right] \to$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -26x_1+6x_2+15x_3 \\ 0 & 1 & 0 & 5x_1-x_2-3x_3 \\ 0 & 0 & 1 & 9x_1-2x_2-5x_3 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -36x_1+8x_2+21x_3 \\ 0 & 1 & 0 & 5x_1-x_2-3x_3 \\ 0 & 0 & 1 & 9x_1-2x_2-5x_3 \end{array}\right]$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -36x_1+8x_2+21x_3 \\ 5x_1-x_2-3x_3 \\ 9x_1-2x_2-5x_3 \end{bmatrix}$$

이므로 모든 $x_1$, $x_2$, $x_3$에 대하여 항상 $a_1$, $a_2$, $a_3$가 존재한다.

$\therefore$ $v_1$, $v_2$, $v_3$는 $R^3$의 기저이다. $\square$

II. 빈칸을 채우시오. 3*8 = 24 점

(1) 실수 값 함수 $f: M_n(\mathrm{R}) \to \mathrm{R}$ 가 아래 3가지 성질을 만족하면 determinant 함수라 한다:

if (1) $f(I)=1$

(2) 행렬의 행이 바뀌면 함수 $f$ 값의 부호 가 바뀐다.

(3) $f$ 는 첫째 행에 대한 선형 함수이다. (더구나 이 함수는 언제나 유일하게 존재한다.) 더구나, 이러한 함수는 언제나 "유일하게 존재한다." 그래서 determinant를 "The determinant"라 하고 det 라 표기한다.

(2) $R(A)$ = row space of A = $\langle A_{(1)}, \cdots, A_{(m)} \rangle$, $C(A)$ = col space of A = $\langle A^{(1)}, \cdots, A^{(n)} \rangle$= $\{Ax: x \in R^n\}$ $= R(A^T)$ , $N(A)$ = Null space (A) = {Ax=0 의 해공간 }, nullity of A = dim (Null space(A) ) 이다.

이때 Thm 3.15 (1st Fundamental Theorem)

$\forall A \in M_{m*n}$, dim $R(A)$ = dim $C(A^T)$

(3) Coro 3. 17 (Rank Theorem) $\forall A \in M_{m \times n}$

dim R(A) + dim N(A) = rank (A) + nullity (A) = _dimension of Domain_ =__n_

(즉, basic 변수의 개수 + free 변수의 개수 = domain 의 차원)

(4) $A$ 대신 $A^T$ 를 넣으면 아래를 얻는다.

_dim C(A) + dim N( $A^T$ ) = rank (A) + nullity ( $A^T$ ) = m = # of A의 row's_

(5) Wronskian 에 대해 아는 바를 서술하시오

$$\begin{bmatrix} f(x) & g(x) & \cdots & h(x) \\ f'(x) & g'(x) & \cdots & h'(x) \\ f''(x) & g''(x) & \cdots & h''(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}_{nn}$$ 의 형태로 이루어진 행렬.을 생각하자

예를 들어 $\begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) \\ f'(x) & g'(x) & h'(x) \\ f''(x) & g''(x) & h''(x) \end{vmatrix} \neq 0$ for some $x_0$ 일 경우 $f(x).g(x).h(x)$ 는 모두 linearly independent를 Wronski 가 보인 것이다. 이 내용을 증명하면.

$$\begin{bmatrix} f(x) & g(x) & h(x) \\ f'(x) & g'(x) & h'(x) \\ f''(x) & g''(x) & h''(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$ 인 행렬을 생각해 보면,

$\begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) \\ f'(x) & g'(x) & h'(x) \\ f''(x) & g''(x) & h''(x) \end{vmatrix} \neq 0$ for some $x_0$ 이라면. Let $c_1 f(x) + c_2 g(x) + c_3 h(x) = \vec{0}$

=> $c_1 f(x_0) + c_2 g(x_0) + c_3 h(x_0) = \vec{0}$ 그 점에서 해 $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ 는 trivial solution 이어야만 한다. 따라서 $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ 리다. $f(x)$ , $g(x)$ , $h(x)$ 가 linearly independent 이다.

(6) Note : Let α={ $\vec{v_1}$ , $\vec{v_2}$ , ⋯ , $\vec{v_n}$ } 이 an "ordered basis" for a v.s V of dim 이 n . Let $\varepsilon$ ={ $e_1$, $e_2$, ⋯ , $e_n$ } 이 the "standard basis" for $R^n$ .

⇒ ∃ isomorphism T : V --> $R^n$ by T( $\vec{v_i}$ ) = $e_i$ ∀ $i$ (이것이 $[Id]_{\varepsilon}^{\alpha}$ )

이를 "the natural _isomorphism_ w.r.t α" 라 한다.

$\vec{x}$ = $\sum a_i \vec{v_i}$ ∈ V 일 때 , $[\vec{x}]_\alpha = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ 이고, $[T(\vec{x})]_\varepsilon = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ 이다.

(7) ∀ L.T T: $V_n \to W_m$ ∃! matrix A ∈ $M_{m,n}$ ∋_ T( $\vec{x}$ ) = A $\vec{x}$ ∀ $\vec{x} \in V_n$

(8) 정리 4.9 : Let L.T $T: V_n \to W_m$ with ordered basis

α={ $\vec{v_1}$ , ⋯ , $\vec{v_n}$ } , β={ $\vec{w_1}$ , ⋯ , $\vec{w_m}$ }

⇒ ∃! $a_{ij}$'s ∋ T( $\vec{v_j}$ ) = $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\vec{w_i}$ ∀ 1≤ j ≤n

⇒ $[T(\vec{v_j})]_\beta = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}_{m\times 1}$ (즉, coordinate vector of T( $\vec{v_j}$ ) w.r.t β)

Let A≡ $[a_{ij}]$ ∈ $M_{m,n}$

[ 그러면 $[T(\vec{x})]_\beta = A[\vec{x}]_\alpha$ ∀ $\vec{x}$ ∈ V 이다.]

위의 matrix A를 "T의 matrix representation w.r.t basis α and β (또는 T의 associated 행렬 w.r.t basis α and β)"이라 하고

$A = [T]_\alpha^\beta$ 라 쓴다.

즉, "T의 matrix representation w.r.t basis α={ $\vec{v_1}$ ,⋯, $\vec{v_n}$ } and β은

$\underline{A = [T]_\alpha^\beta = [\ [T(\vec{v_1})]_\beta \ | \cdots | \ [T(\vec{v_n})]_\beta\ ]_{m\times n}}$ 이다.

Note : $[T(\vec{x})]_\beta = [T]_\alpha^\beta [\vec{x}]_\alpha$ , $[T]_\alpha^\alpha = [T]_\alpha$ (my method)

$[T]_\alpha^\beta = ([I]_\beta^{\varepsilon'})^{-1}[T]_\varepsilon^{\varepsilon'}[I]_\alpha^\varepsilon = [I]_{\varepsilon'}^\beta [T]_\varepsilon^{\varepsilon'}[I]_\alpha^\varepsilon$

ε=ε' 일 때 $B = S^{-1}AS$ 인 similar 행렬의 개념이 여기서 나온다.

III. Find or 빈칸을 채워라. 4*7 = 28 점

1. 문제 .28 Find a polynomial $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$ that satisfies $p(0) = 1, p'(0) = 2, p(1) = 4, p'(1) = 4.$

Sol)

$$\begin{cases} a=1 \\ b=2 \\ a+b+c+d=4 \\ c+2c+3d=4 \end{cases} \quad \begin{bmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 1&1&1&1 \\ 0&1&2&3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} \Rightarrow (\text{첨가행렬}) \begin{bmatrix} 1&0&0&0&1 \\ 0&1&0&0&2 \\ 1&1&1&1&4 \\ 0&1&2&3&4 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1&0&0&0&1 \\ 0&1&0&0&2 \\ 0&1&1&1&3 \\ 0&1&2&3&4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1&0&0&0&1 \\ 0&1&0&0&2 \\ 0&0&1&1&1 \\ 0&1&2&3&4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1&0&0&0&1 \\ 0&1&0&0&2 \\ 0&0&1&1&1 \\ 0&0&2&3&2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1&0&0&0&1 \\ 0&1&0&0&2 \\ 0&0&1&1&1 \\ 0&0&0&1&0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1&0&0&0&1 \\ 0&1&0&0&2 \\ 0&0&1&0&1 \\ 0&0&0&1&0 \end{bmatrix}$$

$\therefore a=1, b=2, c=1, d=0$ $\quad\quad \therefore\ p(x)=1+2x+x^2$

2. (예 3.18) W = { $X_1=(1,-2,5,-3), X_2=(0,1,1,4), X_3=(1,0,1,0)$ } $\subseteq R^4$일 때 span W의 dimension은?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(\text{REF}) \to U = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5/6 \end{bmatrix}$$

=> 3개의 L.I vectors

=> dim V = 3

3. (3.13) $R^3$에서, $W=\{ (x_1, x_2, x_3): x_1-x_2-x_3=0 \}$는 $R^3$의 부분공간이다.

그러면 $x_1-x_2-x_3=0$ , $x_2=s$ , $x_3=t$ $\Rightarrow x_1=s+t$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s+t \\ s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} t$$ 이므로 $W$ 의 기저는

{ (1,1,0) , (1,0,1) } 이다

4. (3.21) (1) A= $\begin{bmatrix} 0&0&0&1 \\ 0&0&1&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&0&0 \end{bmatrix}$ 의 rank는 __3___ 이고,

the largest invertible submatrix 는 $\begin{pmatrix} 0&0&1 \\ 0&1&0 \\ 1&0&0 \end{pmatrix}$ 이다.

5. (Prob. 4.2의 수정) {대각행렬 $A \in M_n(R)$: $\mathrm{tr}(A)=0$ }은 $M_n(R)$의 $n-1$ 차원인 부분공간이다. 이 공간의 a basis를 $E_{ij}$ ( $ij$ 성분만 1이고 나머지는 모두 0인 행렬)을 이용하여 집합으로 표시하면?

___ $\{E_{ii}-E_{nn}:\ i=1,\cdots,n-1\}$ __

6. (예 4.15) Let T : $R^2$ -> $R^3$ by T[x, y] = (x+2y , 0, 2x+3y) w.r.t. standard basis ε and ε′ resp. Find $[T]_{\varepsilon}^{\varepsilon'}$

Sol) $[T]_{\varepsilon}^{\varepsilon'}=[[T(e_1)]_{\varepsilon'} \mid [T(e_2)]_{\varepsilon'}]=\begin{bmatrix}1&2\\0&0\\2&3\end{bmatrix}$ since

$$T(e_2)=T(0,1)=(2,0,3)=2e_1+0e_2+3e_3=\begin{bmatrix}2\\0\\3\end{bmatrix}$$

$$T(e_1)=T(1,0)=(1,0,2)=1e_1+0e_2+2e_3=\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}$$

7. (예 4 .20) Let L.T $T:R^3->R^3$ by $T\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}2x_1+x_2\\x_1+x_2+3x_3\\-x_2\end{bmatrix}$

Let $\alpha=\{e_1,e_2,e_3\}$ 는 $R^3$의 표준기저이고, $\beta=\left\{\begin{bmatrix}-1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$는 $R^3$의 다른 기저이다.

그 러 면 $[T]_\alpha=\begin{bmatrix}2&1&0\\1&1&3\\0&-1&0\end{bmatrix}$이 며 , $Q^{-1}=[Id]_\beta^\alpha=\begin{bmatrix}-1&2&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$ $Q=[Id]_\alpha^\beta=$ $\begin{bmatrix}-1&2&-1\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}$ 이다. 이때 Find $[T]_\beta$

$$\therefore [T]_\beta=[Id]_\alpha^\beta[T]_\alpha[Id]_\beta^\alpha = \ =Q[T]_\alpha Q^{-1}=\begin{bmatrix}0&2&8\\-1&4&6\\0&-1&-1\end{bmatrix}$$ 답

IV. Prove (증명을 완성하시오) 4*5 = 20 점

1. (수업) Prove $\det(AB)=\det(A)\det(B)$

(Proof)

i) If $A$ is singular, then $AB$ is also singular.

So $\det(AB)=0=\det(A)\det(B)$.

(Lemma : $\det(EC)=\det(E)\det(C)$ for any matrix $C$ and elementary matrix $E$.)

ii) If $A$ is nonsingular, then $A=E_n\cdots E_2E_1$, a product of elementary matrices

Hence , $\det(AB)=\det(E_n\cdots E_2E_1B)$

$$=\det(E_n)\det(E_{n-1}\cdots E_2E_1B) = \cdots =$$

$$=\det(E_n)\cdots\det(E_2)\det(E_1)\det(B)$$

$= \det(E_n \cdots E_2 E_1)\det(B)$

$= \det(A)\det(B)$

2. The set of all functions $f$ defined on $R$ such that $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$. 이 (벡터)부분공간임을 보이시오.

증명) Let $F=\{f \mid \lim_{x\to\infty} f(x)=0 \ \ on \ \ \mathbb{R}\} \leqq C(\mathbb{R})$ and let $f, g \in F$

[Show $f+g \in F$]

$\lim_{x\to\infty}(f+g)(x) = \lim_{x\to\infty} f(x) + \lim_{x\to\infty} g(x) = 0+0=0$

[ Show $kf \in F$ for any $k \in R$ ]

$\lim_{x\to\infty} kf(x) = k \lim_{x\to\infty} f(x) = k \times 0 = 0$

$\therefore$ $F$ is a vector space.

3. 문제 4.20 Suppose that A and B are similar n×n matrices. Show that

(2) tr A=tr B,

증명 $\operatorname{tr} B = \operatorname{tr}(Q^{-1}AQ)$

$= tr\,((Q^{-1}A)Q)$

$= tr\,(Q(Q^{-1}A))$ ( $\because$ $tr\,(AB) = tr\,(BA)$ by p.123 Prob 4.3 )

$= tr\,A$

$\therefore$ $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B$

4. (3.22) For any nonzero column vectors $\mathbf{u}, \mathbf{v}$, show that the matrix $A = \mathbf{u}\mathbf{v}^T$ has rank 1. Conversely, every matrix of rank 1 can be written as $\mathbf{u}\mathbf{v}^T$ for some $\mathbf{u}, \mathbf{v}$.

(Proof) (⇒) Let $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$

$$A = \mathbf{u}\mathbf{v}^T = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} [v_1 \ \cdots \ v_n] = \begin{bmatrix} u_1 v_1 & \cdots & u_1 v_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_n v_1 & \cdots & u_n v_n \end{bmatrix} = v_1\mathbf{u} + v_2\mathbf{u} + \cdots + v_n\mathbf{u}$$

$\Rightarrow \{\mathbf{u}\}$ is a basis for C(A). A의 column space

$\Rightarrow$ rank $A$ =1

(⇐)

Let $A \in M_{n\times n}$ and $A^{(1)} = \mathbf{u}$.

suppose rank $A$ =1

$\Rightarrow \langle \mathbf{u} \rangle =$ C($A$). u의 span for some scalars $v_2, \cdots, v_n$

$\Rightarrow A = [\,\mathbf{u} \mid v_2\mathbf{u} \mid \cdots \mid v_n\mathbf{u}\,]$.

Let $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$.

$\Rightarrow\ A = \mathbf{u}\mathbf{v}^T$.

(별지, 5분-참고자료 이용하여 먼저 작성 한 후 제출하고, 본 시험 시작하세요! )

전공: 학년: 학번: Name : 성적: /10

*************************************************************************************

**V. (10점) 참여 확인과 본인의 Project (Term paper) Proposal 에 대해 아래를 채우시오.**

1. 본인이 그간 Q&A, 동료학생, “행렬론”강좌등에 기여한 내용을 간단히 서술하세요!

(1) Q&A 개인 약 ( ) 회, 조별 약 ( )회 (2) 좋은 질문 또는 Finalized the question등 약 ( )회

(3)

(4)

(5)

2. Project Proposal: 주제는 “행렬론”과 “우리겨레 수학”으로 행렬론과 관련된 관심있는 자료를 선정하여 (동료 학생이 관심을 가질 좋은 주제 선정이 중요함) 나름대로 보고서(Term paper)를 만들도록 하면 됩니다.

(0) 보고서 제출 예정 일자: 5월19일 제출 ( 5월 26일 - 수정본 제출)

(1) 연구하고픈 주제 또는 분야의 제목: (사전 허락여부, Yes or No)

(2) 연구 주제의 기본 참고자료 이름 또는 인터넷 사이트 주소 :

(3) 본인은 어떤 식으로 과제를 프로젝트를 수행하려고 합니까?

참고사이트

icampus 행렬론 참고 자료

http://matrix.skku.ac.kr/sglee/

http://matrix.skku.ac.kr/nla/index.html

http://matrix.skku.ac.kr/sglee/Projects.htm

(Bonus) 본인의 10년 후의 모습