(2003. 4.25 12시~13시) Matrix Theory행 렬 론 (Mid. Term) 모범답안

전공: 학년: 학번: Name : 성적: /100

I. 맞으면 (0) or 틀리면 (x) 표 하시오. 2*14 = 28 점

(X) 1. (3.17) 5×5 permutation matrices 들은 일차독립이다.

답) 5×5 permutation matrices 개수는 5×4×3×2×1 = 5! =120 개인데 차원은 25차를 넘지 않으므로 L.I 일 수 없다.

(0) 2. 벡터공간의 모든 spanning set 은 그 공간의 기저를 포함한다.

∴ 기저는 minimal spanning set 이다.

(0) 3. A 가 $m\times n$ matrix with rank m 이면 the column vectors of A span R^m 한다.

답) rank A = $\dim C(A)$ = m 이므로 m 개의 일차 독립인 Column m 개가 존재하고,

m 차원 벡터공간 R^m안의 m 개 열 벡터가 1차 독립이면 그것은 R^m의 기저가 된다 (보조정리 3.1 p.91). 따라서 span 한다.

(X) 4. (3.18) 행렬 A 와 its row-echelon form U 에 대해 열공간은 $C(A)=C(U)$이다.

답) 행공간은 같으나 열공간은 다를 수 있다.

(X) 5. (3.23-1) $\{A\in M_n(R) \mid A^T=A^{-1}\}$ 은 벡터공간 $M_{n\times n}(R)$의 부분공간이다.

답) *False.* Let $W=\{A\in M_{n\times n} \mid A^T=A^{-1}\}\subseteq M_{n\times n}(R)$

6. (X) If A is a nilpotent (즉, A^k = 0), then $I-A$ 의 역 행렬은 $I+A+\cdots+A^k$ 이다.

∴ (I-A)($I+A+\cdots+A^{k-1}$) = I- A^k = I, not $I+A+\cdots+A^k$

7. (X) (p.118 3.8){ $\cos^2 x, \sin^2 x, 1, e^x$} 는 연속함수의 벡터공간 C(R)에서 일차독립이다.

답) $c_1\cos^2 x+c_2\sin^2 x+c_3+c_4e^x=0$ 이 nontrivial 해 ($c_1=c_2=c_3=c_4\neq 0$)을 갖는다.

$\{1, \sin x, \cos x, \cdots, \sin kx, \cos kx\}$ 도 linearly independent.

8. (O) $M_{n\times n}(R)$ 에는 AB-BA= I_n 을 만족하는 행렬 A 와 B 는 없다.

답) tr(AB-BA)=tr(AB+(-BA)) =tr(AB)- tr(BA) =0 이고 tr $I_n=n\neq 0=tr(AB-BA)$

9. (X) 만일 α와 β가 벡터공간 V의 일차독립인 부분집합들이면, 합집합 $\alpha\cup\beta$도 일차독립이다.

답) Let $\alpha=\{c_1, c_2\}, \beta=\{c_2+c_3, c_3, c_4\}$가 각각 일차독립집합 이어도,

$\alpha\cup\beta=\{c_1, c_2, c_2+c_3, c_3, c_4\}$ 는 일차종속 ∴ False.

10. (X) U 와 V 가 벡터공간일때, U 가 V의 부분공간일 필충조건은 $\dim U\leq\dim V$ 이다.

답) 반예: R^3 에서 if $U=R\times\{0\}\times\{0\}$, $V=\{0\}\times R\times R$, then $\dim U\leq\dim V$.

But U is not a subspace of V (단, 부분공간과 idomorphic)

(0) 11. If a matrix A is both idempotent ($A^2=A$) and invertible, then A= I 이다.

답 $A=A^{-1}A^2=A^{-1}A=I_n$

(0) 12. (2.6) 만일 A is n*n skew-symmetric matrix and n is odd, then detA= 0.

증명) $A=-A^T \Rightarrow detA=det(-A^T)=(-1)^n det(A^T)$

$\Rightarrow 2detA=0 \ (\because detA=detA^T \text{and} n=odd) \quad \therefore detA=0$

(0) 13 (2.22) For A, B, C, D∈ $M_{n*n}(R)$, $det\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix}=detA*detD$

OK 그러나 일반적으로 $det\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\neq detA*detD-detB*detC.$

(0) 14. L.T T : V -> W 일 때 T가 1-1 iff kerT={ $\vec{0}$ }

(Prob 4.7)

II. 빈칸을 채우시오. 3*6 = 18 점

(1) 실수 값 함수 $f: M_n(\mathrm{R})\to\mathrm{R}$ 가 아래 3가지 성질을 만족하면 **determinant 함수**라 한다:

if (R1) $f(I)=1$

(R2) 행렬의 행이 바뀌면 함수 f 값의 **부호** 가 바뀐다.

(R3) f 는 첫째 행에 대한 **선형** 함수이다. (더구나 이 함수는 언제나 유일하게 존재한다.)

(2) 선형변환의 기하학적 의미는 벡터공간에서 " $\vec{x}$ 에서 $\vec{y}$ 방향으로의 **line** 을 T($\vec{x}$) 에서 T($\vec{y}$) 방향으로의 **line** 으로 보내는 함수" 라는 것이다.

(3) 행렬 $A=[T]_\alpha^\beta$를 "T의 matrix representation w.r.t basis α={ $\vec{v_1}$,..., $\vec{v_n}$ } and β 이라하고

$A=[T]_\alpha^\beta=[[T(\vec{v_1})]_\beta \mid \cdots \mid [T(\vec{v_n})]_\beta]_{m\times n}$ 으로 구한다.

(4) $[S+T]_\alpha^\beta=[S]_\alpha^\beta+[T]_\alpha^\beta$, $[kS]_\alpha^\beta=k[S]_\alpha^\beta$ 이고

$[T\circ S]_\alpha^\gamma=[T]_\beta^\gamma\circ[S]_\alpha^\beta$, $[T^{-1}]_\beta^\alpha=([T]_\alpha^\beta)^{-1}$

(5) 기저 변환에서 행렬 $Q=[Id]_\beta^\alpha=[\ [\vec{w_1}]_\alpha \mid [\vec{w_2}]_\alpha \mid \cdots \mid [\vec{w_n}]_\alpha\ ]$

이면 $[x]_\alpha=[Id]_\alpha^\beta[x]_\beta$ 이며 $[Id]_\beta^\alpha=Q=[\ [\vec{w_1}]_\alpha \mid \cdots \mid [\vec{w_n}]_\alpha\ ]$이다.

(ie. $Q^{-1}=[Id]_\alpha^\beta$ 는 vector $\boldsymbol{x}$ 의 기저 α-coordinates를 기저 β-coordinates로 바꾸어준다.)

이 $Q=[Id]_\beta^\alpha$ 를 _β 에서 α로의 transition 행렬 (or coordinate change 행렬) 라 한다.

$[x]_\beta=[Id]_\alpha^\beta[x]_\alpha=Q^{-1}[x]_\alpha$

(6) $Let\ A=[a_{ij}]\in M_n\ r_i=A_{(i)}$일때 $P(A)=\{\sum_{i=1}^n t_iA_{(i)} \mid 0\le t_i\le 1, i=1,2,\cdots,n\}$

은 $n=2$이면 **parallelogram(평행사변형)** 이고, $n\ge 3$이면 **parallelepiped** 이다.

III. Find or 빈칸을 채워라. 3*6 = 18 점

1. (p.138) Let T: R^2-> R^3 by T[x, y] = (x+2y , 0, 2x+3y) w.r.t. standard basis ε and ε′ resp. Find $[T]_\varepsilon^{\varepsilon'}$

답) $[T]_\varepsilon^{\varepsilon'}=\begin{bmatrix} (1) & 2 \\ (0) & 0 \\ (2) & 3 \end{bmatrix}$

2. The volume of the parallelepiped with edges determined by the vectors (1,0,4), (0,-2,2) and (3,1,-1).

답 : _____24_____

3. (Problem 3.11) Find a basis and dimension of the sub spaces of all n×n diagonal matrices whose traces are zero of $M_{n*n}(R)$ of all n×n matrices. Let E_{ij} 는 (i, j) 성분만 1 이고 모두 0 인 행렬.

답: dimension은 $n-1$, a basis{ $E_{ii}-E_{nn}$ with $i=1,\ldots,n-1$ }

3'. (다른 문제) Find a basis and dimension of the sub spaces of all n×n matrices whose traces are zero of $M_{n*n}(R)$ of all n×n matrices. Let E_{ij} 는 (i, j) 성분만 1~이고 모두 0 인 행렬.

답: dimension은 n^2-1,

a basis{ E_{ij} with $1\le i\ne j\le n$ with $1\le i\ne j\le n$ and $E_{ii}-E_{nn}$ with $i=1,\ldots,n-1$ }

4. (문제 2.10) Vandermond 행렬식 of order n

$$A=\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & & \cdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{bmatrix}$$ 의 행렬식은 $\det A = \prod_{1\le K_j\le n}^{n}(x_j-x_i)$ 이다.

5. $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 일때 If $A^T=A$ 이면 $A=LDU=LDL^T$ and b=c 이다. $ad\ne 0$ 일때

$\begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix}$를 LDL^T로 factorization 하여라. Sol) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{b}{a} & 1 \end{bmatrix} A=\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d-\frac{b^2}{a} \end{bmatrix}$

Sol) $$\therefore A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{b}{a} & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d-\frac{b^2}{a} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \frac{b}{a} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{b}{a} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d-\frac{b^2}{a} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \frac{b}{a} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = LDL^T$$

6. (MIT) 행렬 A 의 REF 가 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$일때

(a) A 의 rank, 행공간의 차원, 열공간의 차원, Null space의 차원은? 각각_ 3__, _3__, 3__, _2_

(b) 행공간의 기저를 하나 찾으시오.

$\{[1\ 0\ 8\ 0\ -1],[0\ 1\ -2\ 0\ -5],[0\ 0\ 0\ 1\ 4]\}$

(c) 열공간의 기저를 하나 찾으시오. {(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0)}

(d) Null space의 기저를 하나 찾으시오.

$\{[-8\ 2\ 1\ 0\ 0],[1\ 5\ 0\ -4\ 1]\}$

IV. Prove (빈 칸을 채우시오) 3*7 = 21 점

1. A 와 B가 row-equivalent 행렬일때 A 가 nonsingular이면 B 도 nonsingular이다.

Pf) (⇒) If A is invertible, then A and I are row-equivalent.

A and B are row-equivalent. 이므로

So B and I are row-equivalent.

$\therefore$B is invertible. (by Theorem 1.8)

2. (2.19) For an m*n matrix A and n*m matrix B, show that $det\begin{bmatrix} 0 & A \\ -B & I \end{bmatrix} = det(AB)$

(증명) $Let\ E_1 = \begin{bmatrix} 0 & A \\ -B & I \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} I & 0 \\ B & I \end{bmatrix} => E_1E_2 = \begin{bmatrix} 0 & A \\ -B & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & 0 \\ B & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AB & A \\ 0 & I \end{bmatrix}$

$=> det(E_1E_2) = \begin{vmatrix} AB & A \\ 0 & I \end{vmatrix} = det(AB)det(I)\ (\because ty2.23) = det(AB) =>$

$=> det(E_1E_2) = det(AB)$

$=> detE_1 = detAB\ (\because \begin{vmatrix} I & 0 \\ B & I \end{vmatrix} = detI * detI = 1)$

$\therefore \begin{vmatrix} 0 & A \\ -B & I \end{vmatrix} = det(AB)$

3. 정리 2.8 (Cramer의 공식) $if\ Ax = b$ 이고 $detA \neq 0$ 이면, $x_j = \dfrac{detC_j}{detA_j}$, $i = 1, 2, \cdots, n$

$where\ C_j = [A^{(1)} \mid \cdots \mid b \mid \cdots \mid A^{(n)}]$

$$(pf)\ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x = A^{-1}b = \frac{1}{detA}\,adjA \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow x_j = \frac{b_1A_{1j} + b_2A_{2j} + \cdots + b_nA_{nj}}{detA} = \frac{detC_j}{detA}$$

4. (Quiz . p. 103 Problem 3.21) Show A 가 가역행렬이면, Show N(B) ⊇ N(AB)

$\forall x \in N(AB)$

$\Rightarrow$ (AB)x =0

$\Rightarrow$ A(Bx) =0

$\Rightarrow$ $A^{-1}A(Bx) = A^{-1}0 = 0$

$\Rightarrow$ Bx =0 _____

$\Rightarrow$ x ∈ N(B)

따라서 dim N(B) ≥ dim N(AB), 그러므로 rank(B) ≤ rank(AB) • • • (**)

따라서 rank(AB)≤ rank(B) 이므로 (**) 에 의해서 rank(AB) = rank(B) 이다.

5. (정리 2.2) determinant 함수 의 성질 detAB = detA · detB을 보이시오.

증명 (C1) A가 not invertible $detAB = 0 = detA \cdot detB$

(C2) 일반적으로 $detEB = detE \cdot detB$ 이므로 (E가 elem. 행렬)

A가 invertible이면 $A = E_1E_2 \cdots E_k$ 라 쓸 수 있으므로

$$\begin{aligned} detAB &= det(E_1E_2 \cdots E_kB) \\ &= detE_1detE_2 \cdots detE_kdetB \\ &= det(E_1E_2 \cdots E_k)detB \\ &= detAdetB \end{aligned}$$

6. (Problem 3.7) Show that the set $\{1, x, x^2, \cdots, x^n\}$ is a basis for P_n(R), the vecter space of all polynomials of degree≤n with real coefficients.

(Proof)

Let $S=\{1, x, x^2, \cdots, x^n\}$

(i) Suppose $c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n = 0$, $\forall x \in \mathrm{R}$

$\Rightarrow$ $c_0 = c_1 = \cdots = c_n = 0$ ($\because$ x에 대한 항등식)

$\therefore$ S는 L.I. 집합

(ii) For $\forall$ $\mathrm{p}(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \in P_n(\mathrm{R})$,

There are $a_0, a_1, \cdots, a_n$ such that $\mathrm{p}(x)$가 $1, x, x^2, \cdots, x^n$의 L.C.

$\therefore$ $\langle S \rangle = P_n(\mathrm{R})$ $\therefore$ S is a basis for $P_n(\mathrm{R})$

7. (Thm 4.7) (같은 체 상의) 두 V.S V 와 W 가 iso. <=> dim V = dim W

Pf) (=>) T: V-> W 가 iso 이고 $\{ \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \cdots, \overrightarrow{v_n} \}$ 이 V의 a basis 이면

We only need to [Show $\{ T(\overrightarrow{v_1}), \cdots, T(\overrightarrow{v_n}) \}$ 이 W의 a basis]

1)[Show L.I] $\vec{0} = c_1 T(\overrightarrow{v_1}) + \cdots + c_n T(\overrightarrow{v_n}) = T(c_1 \overrightarrow{v_1} + \cdots + c_n \overrightarrow{v_n})$

=> $\vec{0} = c_1 \overrightarrow{v_1} + \cdots + c_n \overrightarrow{v_n}$ ($\because$ T가 1-1)

=> $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$ ($\because$ v_i's 가 L.I.)

2) Span [Show $\forall$ $\overrightarrow{y} \in$ W $\exists$ $\overrightarrow{x} \in$ V $\ni$ T($\overrightarrow{x}$) = $\overrightarrow{y}$]

Say $\overrightarrow{x} = \sum_{i=1}^{n} a \overrightarrow{v_i}$ => $\overrightarrow{y}$ = T($\overrightarrow{x}$)=T($\sum_{i=1}^{n} a \overrightarrow{v_i}$) = $\sum_{i=1}^{n} a_i T(\overrightarrow{v_i})$

따라서 dim V = n = dim W

(<=) dim V = dim W 이면

Let ($\{ \overrightarrow{v_1}, \cdots, \overrightarrow{v_n} \}$, $\{ \overrightarrow{w_1}, \cdots, \overrightarrow{w_n} \}$ 을 V와 W의 기저라 하자.)

그러면 $\exists$ L.T T: V -> W $\ni$ T(v_i) = (w_i) $\forall$ I= 1, ... ,n

[Show T 가 1-1] easy and [Show T가 onto] Do! easy

$\therefore$ T 는 isomorphism ■

(Bonus) If nonzero 행렬 A, B 에 대해 AB=0 , then det(A)=0 & det(B)=0 임을 보여라.

Pf). A, B 의 행렬식이 정의 되려면 둘다 정사각행렬이고, 곱셈 AB가 정의 되려면 둘다 같은 크기 이므로 A, B 의 크기를 n 차의 정사각행렬이라하자.

Let A= $\begin{pmatrix} A_{(1)} \\ A_{(2)} \\ A_{(3)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix}$ and B= $[\, B^{(1)} \;\; B^{(2)} \;\; B^{(3)} \;\; . \;\; . \;\; . \;\; B^{(n)}]_{n \times n}$

and let $(AB)^{(i)}$= ith column of AB, $(AB)_{(j)}$= jth row of AB .

(i) 일반성을 잃지 않고 zero 행렬이 아닌 행렬 B의 첫 번째 column $B^{(1)}$이 nonzero vector라 가정하자. 그리고 AB의 첫 번째 column을 보면,

$$(AB)^{(1)} = \begin{pmatrix} A_{(1)}B^{(1)} \\ A_{(2)}B^{(1)} \\ A_{(3)}B^{(1)} \\ \vdots \\ A_{(n)}B^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1n}b_{n1} \\ \vdots \\ a_{n1}b_{11} + a_{n2}b_{21} + \cdots + a_{nn}b_{n1} \end{pmatrix}$$

$= A^{(1)}b_{11} + A^{(2)}b_{21} + A^{(3)}b_{31} + \cdots + A^{(n)}b_{n1} = \vec{0}$ ($\because$ AB=0)

로 표시 됨을 안다. 이는 column vectors of A 들이 linerar dependent를 의미하고 , then det(A)=0,

(ii) 같은 방법으로 일반성을 잃지 않고 A의 첫 번째 row $A_{(1)}$이 nonzero vector라 가정하자. 그리고 AB의 첫 번째 row 를 보면,

$$(AB)_{(1)} = [\, A_{(1)}B^{(1)}, A_{(1)}B^{(2)}, A_{(1)}B^{(3)}, \ \ldots \ , A_{(1)}B^{(n)}]_{1\times n}$$

$= [\ a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1n}b_{n1}, \ \ldots \ , \ a_{11}b_{1n} + a_{12}b_{2n} + \ \cdots + a_{1n}b_{nn}]_{1\times n}$

$= a_{11}B_{(1)} + a_{12}B_{(2)} + \ \cdots \ + a_{n}B_{(n)} = \vec{0}$ ($\because$ AB=0)

이는 row vectors of B 들이 linerar dependent를 의미하고 , then det(B)=0. 증명 끝.

(별지, 5분-참고자료 이용하여 먼저 작성 한 후 제출하고, 본 시험 시작하세요!)

전공:　　학년:　　학번:　　Name :　　성적:　　/15

****

V. (15점) 참여 확인과 본인의 Project (Term paper) Proposal 에 대해 아래를 채우시오.

5점 1. 본인이 그간 Q&A, 동료학생, "행렬론"강좌등에 기여한 내용을 간단히 서술하세요!

(1) Q&A 개인 약 (　　) 회, 조별 약 (　　)회　(2) 좋은 질문 또는 Finalized the question등 약 (　　)회

(3)

(4)

(5)

10점 2. Project Proposal : (중간고사 중 10점 짜리 문제) 주제는 "디지탈" 과 "행렬론"

행렬론과 관련된 관심있는 자료를 선정하여 (동료 학생이 관심을 가질 좋은 주제 선정이 중요함) 나름대로 보고서(Term paper)를 만들도록하면 됩니다.

(0) 보고서 제출 예정 일자: 5월19일 제출 (5월 26일 - 수정본 제출)

(1) 연구하고픈 주제 또는 분야의 제목: (사전 허락여부, Yes or No)

(2) 선택 : Either 개인프로젝트(　　) or

조별 프로젝트: (　　조) : 프로젝트팀장 _____, 팀원 _____

(3) 연구 주제의 기본 참고자료 이름 또는 인터넷 사이트 주소 :

(4) 본인은 어떤 식으로 과제를 수행하려고 합니까?

참고사이트

icampus 행렬론 참고 자료

http://matrix.skku.ac.kr/sglee/

http://matrix.skku.ac.kr/nla/index.html

http://matrix.skku.ac.kr/sglee/Projects.htm

(Bonus) 기타 나에게 하고 싶은 말은?