(2003. 6.12 12시~13시) Matrix Theory 행 렬 론 (Final)

전공: 학년: 학번: Name :

****

I (2*9=18점)	II 3*8=24점	III 4*6=24점	VI 5*5=25점	V 9점	기타		합 (100점)
							채점용

I. 맞으면 (T) or 틀리면 (F) 표 하시오.

(F) 1. 벡터들 $v_1=(1,1,1,1)$, $v_2=(0,1,1,0)$, $v_3=(1,0,0,1)$ 은 R^4 에서 1차 독립이다.
(T) 2. 행렬 A 와 its row-echelon form U 에 대해 행공간은 $R(A)=R(U)$이다.
(T) 3. Every permutation matrix 은 orthogonal 이다.
(T) 4. 내적공간안의 orthogonal 한 nonzero 벡터들의 집합은 무조건 일차독립이다.
(F) 5. 복소수체에서 n차 실수성분의 행렬 A가 오직 하나의 ((대수적)중복도 포함하여) 고유값만을 가질 수도 있다.
(F) 6. If A and B 가 diagonalizable 이면, AB도 diagonalizable 이다.
(F) 7. If B is obtained from A by interchanging two rows, then B is similar to A.
(T) 8. Any square matrix is similar to a triangular matrix.
(T) 9. A matrix A cannot be similar to $A+I$.

II. 아래 정의의 빈칸 채우시오.

(1) Real valued 함수 $f: M_n(\mathrm{R})\to\mathrm{R}$ 가 아래 3가지 성질을 만족하면 (The) determinant 함수라 한다: if (R1) $f(I)=$ 1 (R2) 행렬의 행이 바뀌면 함수 f 값의 부호 가 바뀐다. (R3) f 는 첫째 행에 대한 선형 함수이다.

(2) 행렬 $A=[T]_\alpha^\beta$를 "T의 matrix representation w.r.t basis α and β where $\alpha=\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_n\}$ and $\beta=\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \cdots, \vec{w}_n\}$ 이라 하고 $A=[T]_\alpha^\beta=[[T(\vec{v}_1)]_\beta \mid \cdots \mid [T(\vec{v}_n)]_\beta]_{m\times n}$ 으로 구한다.

특히 $[Id]_\alpha^\beta$ 를 α에서 β로의 transition (or coordinate change) 행렬이라 한다.

(3) Cauchy-Schwarz 부등식으로부터 $-1 \le \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|} \le 1$ 라는 부등식을 갖게 되며 따라서

$\cos\theta = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|}$ 되는 유일한 수 $\theta\in[0,\pi]$를 $\mathbf{u}$와 $\mathbf{v}$ 사이의 각도(angle, 사이각)이라 한다.

(4) 정리 (Gram-Schmidt 정규직교화 과정) 집합 $S=\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_m\}$을 기저로 갖는 R^n의 영아닌 부분공간을 W라 하자. 그러면 S로부터 얻어진 정규직교기저 $T=\{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \cdots, \mathbf{z}_m\}$가 W에 존재한다. 여기서,

$$\mathbf{z}_i=\frac{\mathbf{y}_i}{\|\mathbf{y}_i\|}, \quad (i=1,2,\cdots,m) \quad \text{이고}$$

$$\mathbf{y}_1=\mathbf{x}_1, \quad \mathbf{y}_2=\mathbf{x}_2-\mathrm{proj}_{<\mathbf{y}_1>}\mathbf{x}_2 = x_2-\frac{\langle x_2, y_1\rangle}{\langle y_1, y_1\rangle}y_1$$

$$\mathbf{y}_3=\mathbf{x}_3-\mathrm{proj}_{\langle \mathbf{y}_1,\mathbf{y}_2\rangle}\mathbf{x}_3 = x_3-\frac{\langle x_3, y_1\rangle}{\langle y_1, y_1\rangle}, y_1-\frac{\langle x_3, y_2\rangle}{\langle y_2, y_2\rangle}y_2$$

…………… $\mathbf{y}_i = \mathbf{x}_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{y}_j \rangle}{\langle \mathbf{y}_j, \mathbf{y}_j \rangle} \mathbf{y}_j, \quad (i = 4, \cdots, m)$

(5) Full rank 갖는 A 에 대한 Ax=b 의 normal equation은 $A^TAx = A^Tb$ 이다.

이 방정식의 the only least square solution 은 $x_s = (A^TA)^{-1}A^Tb$ 이다.

그리고 b 의 A 의 column space C 상으로의 projection 벡터 b_c 는 $b_c = Ax_s$ 이다.

또, $b_C = Ax_s = A(A^TA)^{-1}A^T\mathbf{b}$ 이다. 여기서 $P = A(A^TA)^{-1}A^T$를 the projection matrix for the subspace C of R^n 이라 한다

(6) (실)직교행렬은 $AA^T = I_n = A^TA$이고 유니타리행렬 은 $AA^* = I_n = A^*A$이다. 여기서 A의 켤레전치행렬(conjugate transpose) A^*는 $A^* = \overline{A}^T = [\ \overline{a}_{ji}\ ]_{n\times n}$ 이다.

(7) λ_i가 A의 고유값일 때 동차연립방정식 $(\lambda_i I_n - A)\,\mathbf{x} = 0$ 의 해공간을 λ_i에 대응하는 A의 _ 고유공간(eigenspace) 이라고 한다. 이는 λ_i에 대응하는 A의 고유벡터들에 의하여 생성되는 공간이다. 이 벡터공간의 차원을 λ_i에 대한 기하적중복도(geometric multiplicity)라 한다.

(8) (Schur 정리를 서술하시오) 임의의 n 차의 정사각행렬은 n 개의 (고유값) 을 대각선 성분으로하는 (상 삼각행렬) 과 유니타리 닮음이다.

III. Find or 빈칸을 채워라.

1. Let $f(x)$ and $g(x)$ be continuous real-valued functions on [0,1] 일 때, 벡터공간 $C([0,1])$에서 내적을 $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$ 로 정의하면 $\left[\int_0^1 f(x)g(x)dx\right]^2 = \langle f, g\rangle^2$이고

$\left[\int_0^1 f^2(x)\,dx\right]\left[\int_0^1 g^2(x)\,dx\right] = \langle f, f\rangle\langle g, g\rangle$ 이므로

$Cauchy-Schwarz$ 의부등식 ($|\langle u, v\rangle| \le ||u||\,||v||$) 에 의해

$\langle f, g\rangle^2 \le$ $\langle f, f\rangle\langle g, g\rangle$ 이고 따라서

$\left[\int_0^1 f(x)g(x)dx\right]^2 \le \left[\int_0^1 f^2(x)\,dx\right]\left[\int_0^1 g^2(x)\,dx\right]$ 이다.

2. Find the volume of the three-dimensional tetrahedron in R^4 whose vertices are at (0, 0, 0, 0) , (1, 0, 0, 0), (0, 1, 2, 2) and (0 ,0 ,1, 2).

풀 이 $A^TA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 6 \\ 0 & 6 & 5 \end{bmatrix}$ $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 6 \\ 0 & 6 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 5 \end{vmatrix}$ = 45-36= 9

Vol(A) $= \frac{1}{3}\sqrt{det(A^TA)} = \frac{1}{3}\sqrt{9} = \frac{1}{3} \times 3 = 1$ $\therefore$ vol(A) = 1

3. Find an orthogonal matrix Q and a Jordan Canonical Form J such that $Q^TAQ = J$ for

$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 2 & -6 & 2 \\ 4 & 2 & -3 \end{bmatrix}$

Solve) $det(\lambda I_3 - A) = (\lambda - 2)(\lambda + 7)^2$. 고유값은 $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -7$ 이다.

i) $\lambda_1=2$에 대응하는 고유벡터는 $(\lambda_1 I_3 - A)\mathbf{x}=0$, $\mathbf{x}_1=(2,1,2)$이고,

정규화하면 $\mathbf{z}_1=\dfrac{\mathbf{x}_1}{\|\mathbf{x}_1\|}=\begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$ 이다. -3쪽-

ii) $\lambda_2=-7$에 대응하는 고유벡터는 $(\lambda_2 I_3 - A)\mathbf{x}=0$에서 $x_1=t, x_2=-2t-2s, x_3=s$

이고 $\mathbf{x}_2=\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}_3=\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$이고 Gram-Schmidt 정규직교화과정을 이용하면

$$\mathbf{z}_2=\frac{\mathbf{x}_2}{\|\mathbf{x}_2\|}=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{z}_3=\frac{\mathbf{x}_3-(\mathbf{x}_3\cdot\mathbf{z}_2)\mathbf{z}_2}{\|\mathbf{x}_3-(\mathbf{x}_3\cdot\mathbf{z}_2)\mathbf{z}_2\|}=\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

따라서 직교행렬은

$Q=\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$이고, Jordan Canonical Form J는 $Q^TAQ=J$ 만족하고, 고유값을

대각선 성분으로 갖는 $J=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}$이다.

4. Calculate $A^{10}x$ for $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & 6 & -2 \end{bmatrix}$, $x=\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}$. **참고로** $P^{-1}AP = D=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$를 만족하

는 가역행렬 P는 $P=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$이고 $[\boldsymbol{P}:I]=\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]=\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \end{array}\right]$ 이

다. $A^{10} = PD^{10}P^{-1} =$

$$= P\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1024 \end{bmatrix}P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1024 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1024 \\ 0 & 1 & 2048 \\ 0 & 2 & 3*1024 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2046 & -1023 \\ 0 & 4093 & -2046 \\ 0 & 6138 & -3068 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^{10}x = \begin{bmatrix} 1 & 2046 & -1023 \\ 0 & 4093 & -2046 \\ 0 & 6138 & -3068 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1025 \\ 2050 \\ 3076 \end{bmatrix}$$

5. Find a full set of generalized eigenvectors 와 Jordan 표준형 of $A=\begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

Sol) $det(A-\lambda I)=-\lambda(\lambda+1)^2=0$ $\therefore \lambda_1=\lambda_2=-1, \lambda_3=0$ 으로 놓자.

① $\lambda=-1$ (중복도 2) $A-\lambda I=A+I=\begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$rank(A+I)=2$ (A의 두 번째 행은 첫 번째 행과 세 번째 행의 일차 결합으로 나타내 질 수 있고, 첫 번째 행과 두 번째 행은 일차 독립)

$(A+I)^2 x=0$ and $(A+I)x\neq 0$

$$(A+I)x=\begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -x-2z \\ -x+2y-2z \\ y \end{bmatrix}\neq 0$$

$$(A+I)^2 x=\begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=0$$ -4쪽-

행렬 $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$ 의 RREF는 $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$이므로

$x-2y+2z=0$이라는 조건을 얻을 수 있다.

여기에 $y\neq 0$이란 조건을 함께 고려해서 $\lambda=-1$에 대한 generalized eigenvector 의 하나로 $x_2=(0,1,1)$ 을 택할 수 있다.

따라서

$$x_1=(A+I)x_2=\begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\therefore x_1=(-2,0,1), x_2=(0,1,1)$

② $\lambda=0$ 경우 고유벡터는 $\therefore x=t(-1,1,1)(t\in\mathbb{R})$ 따라서 $x_3=(-1,1,1)$

$\therefore$ a full set of generalized eigenvectors of A is

$\{x_1=(-2,0,1), x_2=(0,1,1), x_3=(-1,1,1)\}$ and JCF 는 $J_A=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

6. JCF 정리 7.11은 $r_1=n-\text{rank}(A-\lambda_i I)$ 이고, 만일 $j>1$ 에 대해, $r_j=\text{rank}((A-\lambda_i I)^{j-1})-\text{rank}((A-\lambda_i I)^j)$라 하면 λ_i 에 대한 점 도표는 r_j 에 의하여 완전히 결정됨을 보여준다. 이제 주어진 15차 행렬 A 의 특성방정식이 $\det(A-\lambda I)=(\lambda-\lambda_i)^9(\lambda-2)^6$ 이면 λ_i 에 대한 9×9 Jordan 표준행렬 A_i 는 그 안의 Jordan block의 개수인 수 l 과 각 Jordan block의 크기들에 의하여 완전하게 결정된다. 즉, A_i 에 대해 $r_1=4$, $r_2=3$, $r_3=1$, $r_4=1$ 라면 그 λ_i에 대한 점 도표를 그리고

•	•	•	•	
•	•	•		
•				
•				

Jordan 표준형 J_{A_i} 를 주어라 .

$$J_{A_i}=\begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_i & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}_{9\times 9}$$

Review (3학년 이상만 : -5 ~ 1점) 다음 미분방정식을 풀어라 -5쪽-

$$x^{(3)}-2x''-5x'+6x=0 \qquad (11)$$

풀 이 계수행렬 $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & 5 & 2 \end{bmatrix}$의 고유값은 $\lambda_1=1,\ \lambda_2=-2,\ \lambda_3=3$ 이므로 A 는 대각화가능하고, 고유값에 대응하는 고유벡터는 각각 $\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\ \mathbf{v}_2=\begin{bmatrix}1\\-2\\4\end{bmatrix},\ \mathbf{v}_3=\begin{bmatrix}1\\3\\9\end{bmatrix}$ 이다. 따라서 $\mathbf{x}'=A\mathbf{x}$ 의 일반해는 정리 6.7에 의하여

$$\underline{\mathbf{x}(t)=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=c_1\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}e^t+c_2\begin{bmatrix}1\\-2\\4\end{bmatrix}e^{-2t}+c_3\begin{bmatrix}1\\3\\9\end{bmatrix}e^{3t}}$$

이고, 식 (11)의 일반해는 $x = x_1$ 이므로 다음과 같다.

$$\underline{x(t)=x_1(t)=c_1e^{t}+c_2e^{-2t}+c_3e^{3t}}$$ ¶

IV. Prove or 빈칸을 채워라.

1. 복소내적공간 V 의 임의의 벡터 $\mathbf{u},\ \mathbf{v}$ 에 대하여 다음이 성립한다.

$$|\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle| \le \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\| \qquad \text{(Cauchy-Schwarz 부등식)}$$

증 명 $\mathbf{u}=\mathbf{0}$이면 trivial. 만일 $\mathbf{u}\neq\mathbf{0}$ then $\mathbf{p}=\mathrm{proj}_{\langle \mathbf{u}\rangle}\mathbf{v}=t\,\mathbf{u}=\dfrac{\langle \mathbf{v},\mathbf{u}\rangle}{\langle \mathbf{u},\mathbf{u}\rangle}\mathbf{u}$ 일때

$\mathbf{w}=\mathbf{v}-\mathbf{p}$ 라 놓으면 $\langle \mathbf{w},\mathbf{p}\rangle=0$ 이다.

$$0 \le \langle \mathbf{w},\mathbf{w}\rangle=\langle \mathbf{w},\mathbf{v}-\mathbf{p}\rangle=\langle \mathbf{w},\mathbf{v}\rangle-\langle \mathbf{w},\mathbf{p}\rangle$$
$$=\langle \mathbf{w},\mathbf{v}\rangle=\langle \mathbf{v}-\mathbf{p},\mathbf{v}\rangle=\langle \mathbf{v},\mathbf{v}\rangle-\langle \mathbf{p},\mathbf{v}\rangle$$
$$=\langle \mathbf{v},\mathbf{v}\rangle-t\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle=\langle \mathbf{v},\mathbf{v}\rangle-\frac{\langle \mathbf{v},\mathbf{u}\rangle}{\langle \mathbf{v},\mathbf{v}\rangle}\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle$$
$$\therefore\ \langle \mathbf{u},\mathbf{u}\rangle\langle \mathbf{v},\mathbf{v}\rangle \ge \langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle\langle \mathbf{v},\mathbf{u}\rangle$$
$$\therefore\ \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2 \ge \overline{\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle}\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle=\|\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle\|^2 \qquad \square$$

2. 다음 if A is an idempotent matrix, then $tr(A)=rank(A)$ 의 증명을 마무리 하시오. .

증명) 우선 A가 an idempotent matrix 이므로 정사각행렬이다.

A를 $n\times n$행렬로 놓으면 $tr(A)=a_{11}+\cdots+a_{nn}=\lambda_1+\cdots+\lambda_n$이다.

$\because$ A의 고유값을 $\lambda_i (i=1,\cdots,n)$라 놓으면 $\lambda_i = 0 \ or \ \lambda_i = 1 \ (i=1,\cdots,n)$. 그러므로 $tr(A)$ 는 영아닌 고유값들의 개수 이다. 이것이 바로 랭크의 정의와 일치한다. 랭크는 REF의 leading nonzero 의 개수 , 즉 nonzero 고유값의 개수와 같은 것임을 이미 배운 바 있다. 그런데 0 아닌 모든 고유값은 1이므로 그 개수가 바로 그 합인 대각합 $tr(A)$ 와 같아 진다는 것이다. (증명 끝)

3. Show $A \cdot adjA = (detA)I_n$.

$$(A \cdot adjA)_{ij} = A_{(i)}adj(A)^{(j)} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = \delta_{ij} \cdot detA$$

$$\Rightarrow A \cdot adjA = \begin{bmatrix} detA & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & detA & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & detA \end{bmatrix} = (detA)I$$

4. n차의 정사각행렬 A가 대각화 가능할 필요충분조건은 A가 n개의 일차독립인 고유벡터를 갖는 것이다. (이 때, A는 자신의 고유값 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$을 주대각선성분으로 갖는 대각선행렬 D와 닮은행렬이다.)

증 명 ($\Rightarrow$) (You know it!)

($\Leftarrow$) A의 고유값 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$에 대응하는 일차독립인 고유벡터를

$$\mathbf{p}^{(1)}, \mathbf{p}^{(2)}, \cdots, \mathbf{p}^{(n)}$$

이라 하고 이것을 열벡터로 갖는 행렬을

$P=[\ \mathbf{p}^{(1)}\ \mathbf{p}^{(2)} \cdots \mathbf{p}^{(n)}\ ]$ 이라 하자. 그러면

$$\begin{aligned} AP &= [\ A\mathbf{p}^{(1)}\ A\mathbf{p}^{(2)} \cdots A\mathbf{p}^{(n)}\ ] \\ &= [\ \lambda_1\mathbf{p}^{(1)}\ \lambda_2\mathbf{p}^{(2)} \cdots \lambda_n\mathbf{p}^{(n)}\ ] \\ &= [\ \mathbf{p}^{(1)}\ \mathbf{p}^{(2)} \cdots \mathbf{p}^{(n)}\ ] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \\ &= PD \end{aligned}$$

그런데 P의 열벡터들은 일차독립이므로 P는 가역이다. 따라서

$$P^{-1}AP = D = \mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$$

이고 A는 대각화 가능하다. □

5. $For \ m \times n \ A, \ rank(A^TA) = rankA.$

증 명 Rank-Nullity 정리에 의해 null space $N(A^TA) = N(A)$ 임을 보이면 된다.

(=>) For all x in $N(A^TA)$) => $A^TAx = 0$ => $< Ax, Ax >= x^TA^TAx = x^T0 = 0.$ => $Ax = 0$ => $x \ in \ N(A)$

(=>) For all x in $N(A)$) => $Ax = 0$ => $A^TAx = 0$ => $x \ in \ N(A^TA)$

따라서 $N(A^TA) = N(A)$.

(증명 끝)

****

V. (9점) 참여 점수

1.(3점) 본인이 그간 Q&A, 동료학생, “행렬론”강좌등에 기여한 내용을 간단히 서술하세요!

2. (3점) 본인이 완성한 프로젝트의 내용과 그 과정에서 느낀 점을 서술하시오

3. (3점) 우리의 자기 주도적인 Belended learning(both on and offline learning)에서 배운 점이나 기타 하고 픈 얘기를 서술하세요! **-한 학기 수고 많았어요! 좋은 여름 가지기 바래요!**