Spring 2014, Calculus I, Final Comprehensive Exam (채점용 Solution)						Sign
Course	Calculus I with Sage		GEDB020-42	Prof.	Sang-Gu Lee	
Major		Year(학년)	S.N(학번)		Name	

※ Notice (수험생 유의사항)

1. Write your name and get the signature. 답안 작성전에 이름 등을 기입하고 감독자 날인을 받으세요.
2. Keep your Honor code (부정행위 방지).

Score (150)	
Final-PBL	EXAM
/50	/100

http://matrix.skku.ac.kr/Cal-Book/ ,http://matrix.skku.ac.kr/Lab-Book/Sage-Lab-Manual-1.htm

http://matrix.skku.ac.kr/cal-lab/sage-grapher.html , http://matrix.skku.ac.kr/cal-lab/sage-grapher-para.html

var('a, b, c, d') # 변수정의
limit(f(x), x=a) # 극한
limit(f(x), x=a, dir='minus') # 좌극한
limit(f(x), x=a, dir='plus') # 우극한
limit(f(x), x=+oo) # 무한대에서의 극한
limit(f(x), x=-oo)
 	
solve(f(x)==0, x) # Solve 방정식 풀이
diff(f(x), x) # 도함수
diff(f(x), x, 2) # 2계 도함수
integral(f(x), x) # 부정적분
integral(f(x), x, a, b) # 정적분
plot(f(x), (x, a, b) # 함수의 그래프
	find_root(f(x), a, b) # 근사해 구하기
	
	implicit_plot(f, (x, a, b), (y, c, d)) # 음함수 그래프
	
	var('t') # 변수정의 (매개변수방정식)
	x=2+2*t
	y=-3*t-2
	
	parametric_plot((x, y), (t, -10, 10), rgbcolor='red') # 직선 Plot
	parametric_plot((cos(t), sin(t)), (t, 0, pi))
	
	exp.partial_fraction() # exp의 부분분수
	taylor(f(x), x, 0, 5) # f(x)의 x=0에서 5차 Taylor전개식

I. (2pt x 9 = 18) Mark True(T) or False(F) in the blanks ( ).

1. (F) If $\lim_{x\to a} f(x)$ and $\lim_{x\to a} g(x)$ exist, then $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$ also exists. - not true in general -

2. (F) The area of the region, bounded by the curves, $y=x$ and $y=\sqrt[3]{x}$ is $A=\int_0^1[\sqrt[3]{x}-x]dx=\frac{1}{6}$. Ans. 1/4

3. (F) For any function $y=f(x)$ defined on $[a,b]$, $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ is differentiable on $[a,b]$ and $\frac{d}{dx}F(x)=f(x)$.

- not true in general -

4. (F) The radius of convergence of the power series $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-5)^n}{3^n}$ is 5, Ans. 3

5. (T) The area of the surface of revolution obtained by rotating the curve $y=f(x)$, $a\le x\le b$, about the x-axis is given by $S=\int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$. http://mathworld.wolfram.com/SurfaceofRevolution.html

6. (F) The alternating series $\frac{3}{1}-\frac{5}{2}+\frac{7}{3}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n}+\ldots$ does converge. - diverge -

7. (F) $\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2}dx = -2$. Ans. 2 -Improper Integral (이상적분)-

8. (F) Since the radius of convergence of the power series $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\ln n}$ is 1, its interval of convergence is (-1, 1). -

- not true in general (end points case should be checked seperately) -

9. (F) For any function $f(x)$ can be differentiated infinitely many times for all x, its Taylor series about $x=0$ always converges to $f(x)$ for all x in $(-\epsilon,\epsilon)$, $\epsilon>0$. - Remainder 항이 0 으로 수렴해야만 true -

II. (3pt x 4 = 12) State or Define.

1. Choose 1 from each category (all 4) and state its meaning as much as you knows in your words.

① Newton's Method ② Improper Integral (이상적분) ③ The Arc Length Formula ④ Limt Comparison Test
⑤ Leibniz가 생각한 <미분의 개념> 은 무엇인가? ⑥ Archimedes를 비롯한 수학자들이 원의 면적을 구하는 방법에서 발전한 <정적분>의 아이디어는 무엇인가? ⑦ 미분을 배우는 이유는 무엇일까? ⑧ Arc length 구하는 아이디어에 대하여 서술하시오.
⑨ 컴퓨터 단층 촬영 장치인 CT에는 적분의 어떤 아이디어가 이용된 것인가? ⑩ 미분과 적분을 이어주는 정리는 무엇인지 말하고, 그 이유에 대하여 아는 대로 서술하시오. ⑪ 19세기에 극한을 엄밀한 논리(argument)를 이용하여 완전한 형식화 방법은 무엇인가?
⑫ differential (infinitesimal-infinitely small) dx 는 왜 중요한가? ⑬ 근사다항식와 Taylor급수가 왜 중요한지 아는 대로 서술해 보시오. ⑭ Flipped Learning(역진행 수업) 이란? ⑮ Gamma function

▶▶ **Sol** http://matrix.skku.ac.kr/Calculus-Story/index.htm

① **Procedure for Newton's Method.**

▶▶ **Sol** Let us consider the graph of $y=f(x)$ and we want to solve $f(x)=0$. We start with the (proper, 해에 충분히 가까운) initial approximation x_1, which may be obtained by just guessing, or examining the graph of f. Then we use the tangent line L to the curve $y=f(x)$ at the point $(x_1, f(x_1))$ to approximate the curve and look at the x-intercept of L, labeled x_2. The equation of the tangent line L is $y-f(x_1)=f'(x_1)(x-x_1)$. Thus, we obtain $0-f(x_1)=f'(x_1)(x_2-x_1)$. If $f'(x_1)\neq 0$, we can solve this equation for x_2: $x_2=x_1-\dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)}$
Under certain conditions, x_2 is usually a better approximation to the solution than x_1. Then we repeat this procedure with x_1 replaced by x_2, using the tangent line at $(x_2, f(x_2))$. This gives a third approximation: $x_3=x_2-\dfrac{f(x_2)}{f'(x_2)}$. Continuing this process obtains a sequence of approximations x_1, x_2, x_3, ... as shown in the Figure. In general, if $f'(x_n)\neq 0$ then we have $x_{n+1}=x_n-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$. The number x_n becomes closer and closer to the solution if the sequence $\{x_n\}$ converges as $n\to\infty$. We note that if $f'(x_1)\to 0$ then the sequence may not converge. In this case, we have to choose a different initial x_1. ■

② Improper Integral (이상적분) : http://ko.wikipedia.org/wiki/이상적분

③ The Arc Length Formula : http://www.mathwords.com/a/arc_length_of_a_curve.htm

④ Limt **Comparison Test** : **http://en.wikipedia.org/wiki/Limit_comparison_test**

5. Leibniz가 생각한 <미분의 개념> 은 무엇인가?

(답의 예) 특정한 시간에서 움직이는 물체의 정확한 속도를 찾는 방법은 무엇일까? 이것이 도함수의 개념인데 정확한 속도를 구하기 위해 (데카르트의 좌표를 이용해) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 에서 측정하는 간격 Δx를 줄이면 된다. 즉, 간격을 좁힐수록 원하는 점에서의 정확한 속도를 알 수 있게 된다. 즉, 한 점에서의 순간 속도란 그 점 주위에서 평균속도가 수렴하는 값을 의미한다.

6. 기원전 3세기경 포물선과 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하려는 Archimedes를 비롯한 수학자들이 원의 면적을 구하는 방법에서 발전한 <정적분>의 아이디어는 무엇인가?

(답의 예) 원판(disc)에 정다각형을 내접시키거나 외접시켜서 구하는 구분구적법의 아이디어 http://www.geogebratube.org/student/m70806

7. 미분을 배우는 이유는 무엇일까?

(답의 예) 미적분학의 핵심은 변화에 대한 관찰 그리고 그것을 통한 어느 시점에서의 상황의 예측, 즉 움직임의 수학에 대한 연구이다. 한 예로 대포로 쏘아올린 포탄이 포물선을 그려 얼마정도 후에 어느 위치에 있을지, 통에 물을 붓는데 이 때 높이나 부피의 변화를 구하는 문제들이 포함된다. 이러한 문제들이 단지 문제를 위한 문제가 아니라 실제로 일반적인 변화를 이해하고, 미래를 예측하는데 사용될 수 있다. 따라서 우리가 미적분학을 배우는 이유는 그 지식을 이용하여 '미래를 예측하기 위함' 이라고 생각할 수 있다.

8. Arc length 구하는 아이디어에 대하여 서술하시오.

(답의 예) 곡선의 길이를 구하는 것은 그 곡선을 미세하게 분해해서 보는 것으로 시작한다. 이때 곡선을 매우 작게 쪼개면 직선과 같다. 이때 그 직선을 직각삼각형의 빗변으로 생각하면, x의 미소변화량과 y의 미소변화량이 각각 밑변과 높이가 되고, 따라서 피타고라스의 정리를 이용하여

((x^2+y^2)^1/2) 구할 수 있다 .

9. Center of mass를 배우는 이유는?

(답의 예) 질량중심은 공식을 이용하여 어렵지 않게 구할 수 있다. 그럼 바윗돌이나 Torus, 우주선 같이 불균형하게 생긴 물체의 경우도 질량중심과 무게만 알면 그 물체의 운동을 분석하고 이해하여 미래 상황을 예측하는 것이 가능하기 때문에 매우 유용하게 쓰일 수 있다.

10. 컴퓨터 단층 촬영 장치인 CT에는 적분의 어떤 아이디어가 이용된 것인가?

(답의 예) 몸속 장기의 단면을 무수히 잘게 나누어 계속 찍고 단면의 합으로 부피를 구하는 적분의 아이디어를 이용하여 그 사진들을 종합하여 장기의 전체적인 모양을 알아내어 여러 가지 병을 진단하는데 이용된다.

11. 19세기에 Bernard Bolzano, Augustin-Louis Cauchy, Karl Weierstrass 등을 거치면서, 극한을 엄밀한 논리(argument)를 이용하여 완전한 형식화 방법은 무엇인가?

(답의 예) $\epsilon - \delta$ 정의와 증명 http://en.wikipedia.org/wiki/(%CE%B5,_%CE%B4)-definition_of_limit

12. 미분과 적분을 이어주는 정리는 무엇인지 말하고, 그 이유에 대하여 아는 대로 서술하시오~~

(답의 예) Fundamental Theorem of Calculus http://en.wikipedia.org/wiki/Fundamental_theorem_of_calculus

13. 행성들의 운동을 나타내는 Kepler의 법칙을 설명하기 위하여 미적분학을 개발한 사람은 누구인가?

(답의 예) Sir Isaac Newton(1642 - 1727]) English physicist and mathematician, natural philosopher

14. 근사다항식와 Taylor급수가 왜 중요한지 아는 대로 서술해 보시오.

(답의 예) http://gmaedu.co.kr/bbs_01/read.asp?kind=1&mode=&top=&field=&word=&page=&webid=695

15. differential (infinitesimal-infinitely small) dx 는 왜 중요한가?

(답의 예) http://en.wikipedia.org/wiki/Differential_(infinitesimal) Infinitesimal quantities played a significant role in the development of calculus. Archimedes used them, even though he didn't believe that arguments involving infinitesimals were rigorous.[5] Isaac Newton referred to them as fluxions. However, it was Gottfried Leibniz who coined the term differentials for infinitesimal quantities, and introduced the notation for them which is still used today. In Leibniz's notation, if x is a variable quantity, then dx denotes an infinitesimal change in the variable x. Thus, if y is a function of x, then the derivative of y with respect to x is often denoted dy/dx, which would otherwise be denoted (in the notation of Newton or Lagrange) $\dot{y}$ or y'. The notation has remained popular because it suggests strongly the idea that the derivative of y at x is its instantaneous rate of change (the slope of the graph's tangent line), which may be obtained by taking the limit of the ratio $\Delta y/\Delta x$ of the change in y over the change in x, as the change in x becomes arbitrarily small. Differentials are also compatible with dimensional analysis, where a differential such as dx has the same dimensions as the variable x.

16. Flipped Learning(역진행 수업) 이란?

lecture – memorization - tests가 아니라 수업전에 강의관련 자료를 미리 학습하고, 궁금한 것은 QnA에 질문하고 답한 후, 수업에서는 막혔던 문제를 해결하고, visualization(intuition)-trial-error-speculation-explanation을 하는 학습의 순서를 바꾼 우리 강의실. 이를 위하여는 충분히 준비된 자료와 그것들을 이용할 능력이 있는 교수자가 필요하다. 화이트 헤드는 "'교수가 수업 중에 학생에게 학습내용을 얼마나 cover 하느냐 보다, 얼마나 많은 것을 학생에게 노출시키는가가 더 중요하다" 라고 하였다. 코세라(Coursera) 참고,

17. Gamma function

http://ko.wikipedia.org/wiki/감마함수

III. (4pt x 10 = 40pt) Find or Explain or Fill the blanks $\boxed{}$.

1. Use differential to approximate $\sqrt[3]{63}$.

Sol Let $f(x)=\sqrt[3]{x}$. Set $x=64$ and $\Delta x=-1$. Since $df\approx \Delta x$, $df=\dfrac{dx}{3\sqrt[3]{x^2}}$, we have $df|_{x=64}=-\dfrac{1}{48}$.

Hence approximately, $\sqrt{63}=f(64+\Delta x)\approx f(64)+df|_{x=64}=\sqrt[3]{64}-\dfrac{1}{48}=\dfrac{191}{48}\approx 3.9791667$.

[CAS]

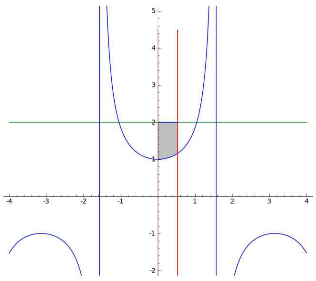
```
var('x')
f(x) = x^(1/3)
df(x) = diff(f(x), x)
dx=-1
a=f(64) + df(64)*dx
print a, "=", a.n()
```

Answer: 191/48 = 3.97916666666667 ■

2. The area of the region, bounded by the given curves $y=\dfrac{1}{\cos x}$, $y=2$, $x=0$, $x=\dfrac{\pi}{6}$ can be found by Sage.

Sol) http://math1.skku.ac.kr/home/pub/2180

```
var('x, y')
f(x) = 2
g(x) = 1/cos(x)
show (integral ( f(x)-g(x)     , x, 0, pi/6) )
```



Answer : $\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{2}\log(2)-\dfrac{1}{2}\log(\dfrac{3}{2})$ ■

3. Explain how you find **the radius of convergence** and **interval of convergence** for the series $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x+2)^n}{3^n}$.

Sol) *(풀이 과정만 서술하세요. 정확한 답은 안주어도 됩니다.)*

Let $a_n=\dfrac{(-1)^n(x+2)^n}{3^n}$. Then

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}(x+2)^{n+1}}{(3)^{n+1}}\ \frac{3^n}{(-1)^n(x+2)^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}|x+2|.$$

Using the Ratio Test, the given series is absolutely convergent and therefore convergent when $|x+2|<3$, and divergent when $|x+2|>3$.

1. $x=1$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x+2)^n}{3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ is not convergent.

2. $x=-5$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x+2)^n}{3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}1$ is not convergent.

Answer:

the radius of convergence $R=3$

interval of convergence $(-5,\ 1)$

4. Find $\int \frac{x^2+1}{(x^3+1)(x^2+4)}dx$.

Sol) Decompose the original function to partial fraction.

$$\frac{x^2+1}{(x^3+1)(x^2+4)} = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2-x+1} + \frac{dx+e}{x^2+4}$$

$$\begin{cases} a+b+d=0 \\ -a+b+c+e=0 \\ 5a+4b+c=1 \\ -4a+4b+4c+d=0 \\ 4a+4c+e=1 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad a=\frac{2}{15},\ b=\frac{2}{39},\ c=\frac{5}{39},\ d=-\frac{12}{65},\ e=-\frac{3}{65}$$

[CAS] http://matrix.skku.ac.kr/cal-lab/cal-7-4-Exm-3.html

```
var('x')
exp = (x^2 +1) / ((x^3+1)*(x^2+4))
exp.partial_fraction()
```

1/39*(2*x + 5)/(x^2 - x + 1) - 3/65*(4*x + 1)/(x^2 + 4) + 2/15/(x + 1)

$$\frac{x^2+1}{(x^3+1)(x^2+4)} = \frac{2}{15(x+1)} + \frac{2x+5}{39(x^2-x+1)} - \frac{12x+3}{65(x^2+4)}$$

$$\int \frac{x^2+1}{(x^3+1)(x^2+4)}dx$$

$$= \frac{4\sqrt{3}}{39}\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}(2x-1)}{3}\right) + \frac{2\ln(x+1)}{15} - \frac{6\ln(x^2+4)}{65} + \frac{\ln(x^2-x+1)}{39} - \frac{3\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)}{130}$$

[CAS] http://math1.skku.ac.kr/home/pub/2196

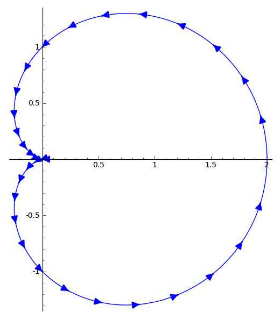
```
integral (  (x^2+1)/((x^3+1)*(x^2+4)),   x                    )
```

4/39*sqrt(3)*arctan(1/3*(2*x - 1)*sqrt(3)) + 2/15*log(x + 1) - 6/65*log(x^2 + 4) + 1/39*log(x^2 - x + 1) - 3/130*arctan(1/2*x)

Answer : $\int \frac{x^2+1}{(x^3+1)(x^2+4)}dx = \frac{4\sqrt{3}}{39}\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}(2x-1)}{3}\right) + \frac{2\ln(x+1)}{15} - \frac{6\ln(x^2+4)}{65} + \frac{\ln(x^2-x+1)}{39} - \frac{3\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)}{130} + C$ ■

5. Sketch the (parametric) curve $x = \cos t(1+\cos t),\ y = \sin t(1+\cos t),\ 0 \le t \le 2\pi$ and indicate with an arrow the direction in which the curve is traced as the parameter increases.

Sol) [CAS] http://math1.skku.ac.kr/home/pub/2252




```
var('t, x, y')
x=cos(t)*(1+cos(t))
y=sin(t)*(1+cos(t))
a=0
b=2*pi
p=parametric_plot( (x, y) ,  (t, a, b)              )
small=0.001
step=pi/16
n=(b-a)/step
arr=sum([arrow((x(t=a+i*step), y(t=a+i*step)), (x(t=a+i*step+small), y(t=a+i*step+small))) for i in range(1, n) ])
p+arr
```

Answer : [the above graph] ■

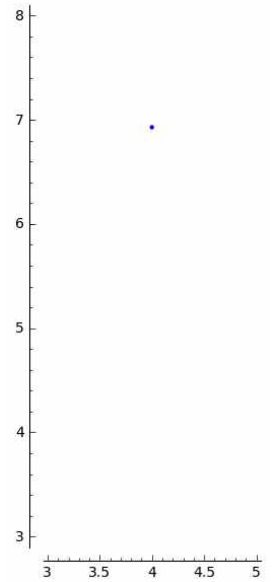
6. Plot the point whose polar coordinates are given. Then, find the Cartesian coordinates of the point.

$$(r,\theta)=(8,\frac{13}{3}\pi)$$

Sol)

$$x = r\cos\theta = 8\cos\frac{13}{3}\pi = 4$$

$$y = r\sin\theta = 8\sin\frac{13}{3}\pi = 4\sqrt{3}$$



$\therefore$ The Cartesian coordinates of (r,θ) is $(4,\ 4\sqrt{3})$.

[CAS] http://math1.skku.ac.kr/home/pub/2258/

```
def Polar(r, theta):
    #converts Polar to Cartesian Coordinates
    CartC = ([r*cos(theta), r*sin(theta)]);
    return CartC;
pt=Polar(8, 13/3*pi);
show( vector(pt))  # (4, 4√3)
list_plot([pt], aspect_ratio=1, xmin=3, xmax=4, ymin=3, ymax=8)
```

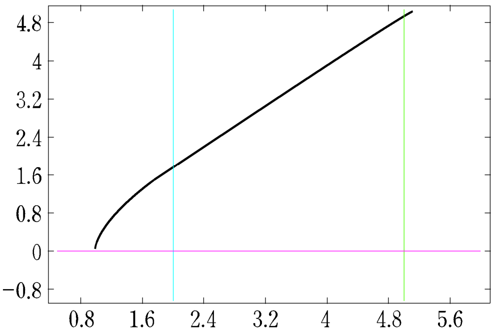
Answer : $(4,\ 4\sqrt{3})$ ■

7. Calculate the volume of the solid obtained by rotating the region bounded by the given curves about the specified line.

$y=\sqrt{x^2-1}$, $x=2$, $x=5$, $y=0$; about the x-axis

Sol http://matrix.skku.ac.kr/cal-lab/cal-6-2-4.html

$$A(x) = \pi(\sqrt{x^2-1})^2 \quad , \quad V = \int_2^5 A(x)\, dx = 36\pi$$




```
var('x, y')

p1 = parametric_plot((2, y), (y, -1, 5), color='blue')
p2 = parametric_plot((5, y), (y, -1, 5), color='green')
p3 = implicit_plot(y==sqrt(x^2-1), (x, 1, 6), (y, -1, 5))
p4 = parametric_plot((x, 0), (x, 0.5, 6), color='red')

show(p1+p2+p3+p4)

print integral (pi*sqrt(x^2-1)^2, x, 2, 5)
```

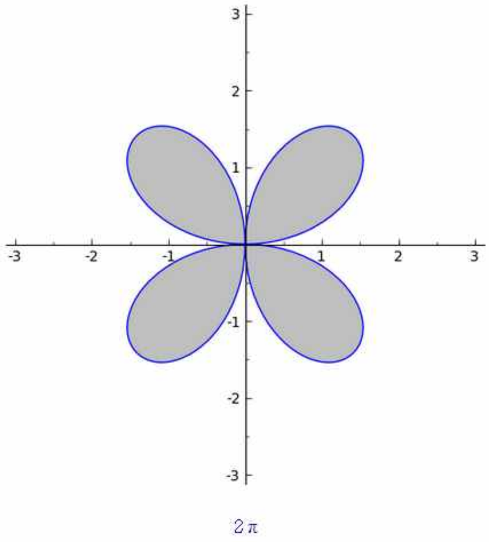
Answer : 36pi ■

8. Find the area bounded by the given curve on $[0, 2\pi]$. (one loop).

$$r = 2\sin 2\theta$$

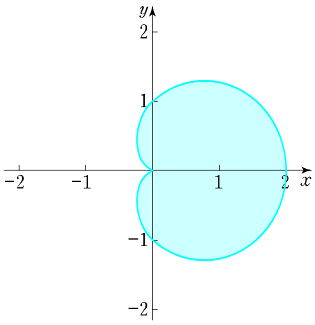
Sol) http://math1.skku.ac.kr/home/pub/2281

```
var('theta')
polar_plot(2*sin(2*theta), (0, 2*pi), fill=true).show(aspect_ratio=1, xmin=-3, xmax=3, ymin=-3, ymax=3)
r = 2*sin(2*theta)
A = integral (     1/2*r^2     , theta,  0, 2*pi)
show(A)
```



Answer : 2π ■

9. Find the (arc) length of the cardioid $r = 1 + \cos\theta$.



$r = 1 + \cos\theta$

▶▶ **Sol** The full length of the cardioid (see Figure) is given by the parameter interval $0 \le \theta \le 2\pi$.

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{(1+\cos\theta)^2 + (-\sin\theta)^2}\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{2(1+\cos\theta)}\, d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{4\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left|2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right| d\theta = 2\int_0^{\pi} 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta = 8\left[\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]_0^{\pi} = 8$$ ■

```
var('x, t')
x = 2*(cos(t/2))
2*integral(x, t, 0, pi)
```

Answer: 8 ■

10. Find the first three non-zero terms of the Maclaurin series for $e^x \cos x$.

▶▶ **Sol** Multiplying the Maclaurin series for e^x and $\cos x$, then collecting like terms, we have

$$e^x \cos x = \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots\right) = 1 + x - \frac{1}{3}x^3 - \cdots.$$ ■

IV. (6pt x 5 = 30pt) Prove or Explain (Fill the blanks $\boxed{}$).

1. Show $\lim_{x \to -1} x^2+2x-5 = -6$ using $\epsilon-\delta$ method.

▸ **Proof :**

$\forall \epsilon > 0$ [Find δ] Let $\delta = \sqrt{\epsilon}$

If $0 < |x+1| < \delta$, then $|x^2+2x-5+6| = (x+1)^2 < \delta^2 = (\sqrt{\epsilon})^2 = \epsilon$

[Side Calculation] $f(x) - f(-1) = x^2+2x-5+6 = x^2+2x+1 = (x+1)^2$ ■

2. $\lim_{x \to 5} \frac{1}{(x-5)^2} = \infty$.

▸ **Proof :** $\forall$ Large number $M > 0$, [Find δ] Let $\delta = \frac{1}{\sqrt{M}}$ $\quad (\Rightarrow \frac{1}{\delta^2} = M)$

If $0 < |x-5| < \delta$, then $|f(x)| = \frac{1}{(x-5)^2} > \frac{1}{\delta^2} = M$

$\therefore \lim_{x \to 5} \frac{1}{(x-5)^2} = \infty$ ■

[Side calculation] Since $M > 0$, $(x-5)^2 > 0$, $\sqrt{(x-5)^2} = |x-5| > 0 \Rightarrow |x-5| < \delta$

$$\frac{1}{(x-5)^2} > \frac{1}{\delta^2} = M \quad \Rightarrow \delta = \frac{1}{\sqrt{M}}$$

3. Verify the formula $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx = -\sin^{-1}\frac{1}{x} + C \quad (x > 0)$. by Sage .

▸ **Proof :** Let $x = \csc t$, $dx = -\csc t \cot t \, dt$ $\quad \Rightarrow \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{\csc t \sqrt{\csc^2 t - 1}} = \frac{1}{\csc t \cot t}$

Thus $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx = \int \frac{1}{\csc t \cot t} (-\csc t \cot t) dt = -\int dt = -t + C$

$x = \csc t \Rightarrow \frac{1}{x} = \sin t \Rightarrow t = \sin^{-1}\frac{1}{x}$. $\qquad$ Hence $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx = -\sin^{-1}\frac{1}{x} + C.$

Verify the above formula by Sage

▸▸ **Sol**

```
var('x')
f = 1/(x*sqrt(x^2-1))
assume( x > 0 )
integral( f, x )
```

-arcsin(1/x) # $= -\sin^{-1}\frac{1}{x} + C$

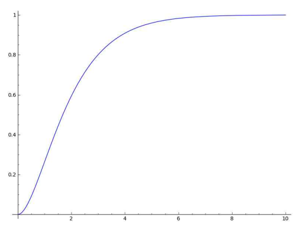
=> LHS (좌변) = RHS (우변) ■

4. Show the improper integral $\int_0^\infty x e^{-x} dx = 1$ by integration by parts and CAS.

Sol) $\int_0^t x e^{-x} dx = [-xe^{-x}]_0^t + \int_0^t e^{-x} dx = -te^{-t} + [-e^{-t}] = -te^{-t} - e^{-t} + 1$

$$\int_0^\infty x e^{-x} dx = \lim_{t \to \infty} \int_0^t x e^{-x} dx = \lim_{t \to \infty} (-te^{-t} - e^{-t} + 1) = 1. \quad \square$$

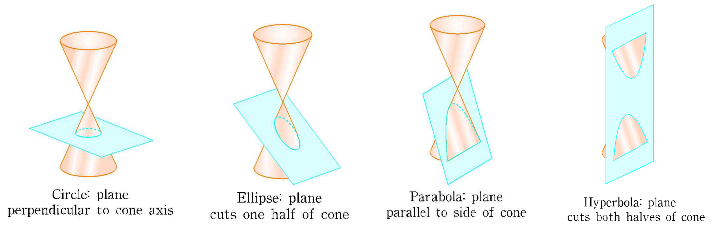
[CAS] http://math1.skku.ac.kr/home/pub/2232

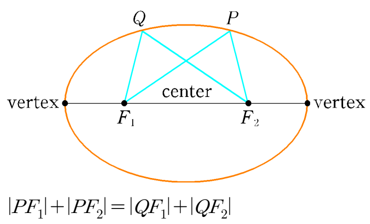


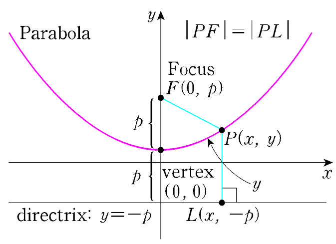
```
var('x')
g = integrate(x*e^(-x), x)
p1=plot(g(x)-g(0), x, 0, 10)
show(p1)
int = integrate(  x*e^(-x),     x, 0, infinity)
print(int)   #   1
```

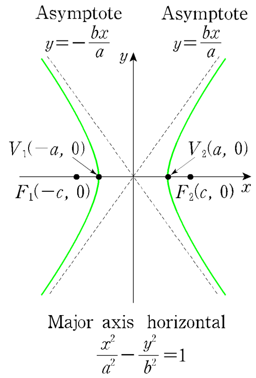
Answer : $\int_0^\infty x e^{-x} dx = 1$ ■

5. (Conic section) A conic section (or just conic) is a curve obtained by intersecting a cone (more precisely, a right circular conical surface) with a plane. The three types of conic section are the hyperbola, the parabola, and the ellipse. The circle is a special case of the ellipse. I expect that you know about the process of forming the formulas of hyperbola, parabola, and ellipse as you see below.









Identify the type of conic section whose equation is given and find the vertices and foci.

$$2x^2 = 4y - y^2$$

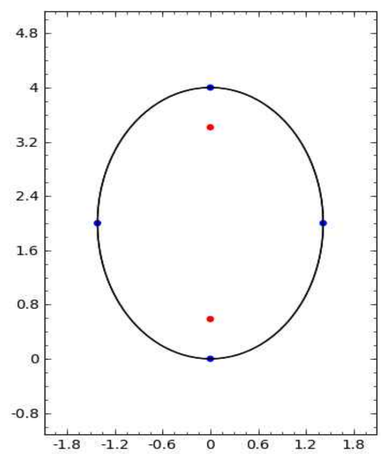
Sol)

$$2x^2 + y^2 - 4y = 0$$
$$2x^2 + (y-2)^2 = 4$$
$$\frac{x^2}{2} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$$

(0,2)

vertices: $(\sqrt{2},2)$, $(-\sqrt{2},2)$, (0,4), (0,0)

foci : $(0,2+\sqrt{2})$, $(0,2-\sqrt{2})$



[CAS] http://math1.skku.ac.kr/home/mm2013/1053/

```
var('x, y')
ellipse=implicit_plot(x^2/2+(y-2)^2/4 == 1, (x, -2, 2), (y, -2, 8) )
f1=point((0,2-sqrt(2)), pointsize=20, rgbcolor=(1,0,0));
f2=point((0,2+sqrt(2)), pointsize=20, rgbcolor=(1,0,0));
v1=point((-sqrt(2),2), pointsize=20, rgbcolor=(0,0,1));
v2=point((sqrt(2),2), pointsize=20, rgbcolor=(0,0,1));
v3=point((0,0),pointsize=20,rgbcolor=(0,0,1));
v4=point((0,4),pointsize=20,rgbcolor=(0,0,1));
show(ellipse+f1+f2+v1+v2+v3+v4, aspect_ratio=1, xmin=-2, xmax=2, ymin=-1, ymax=5)
```

V. (2pt x 3 = 6pt) **Student Name: ____________________** **Score: /6**

1. **(2pt)** Number of your QnA participation till yesterday. (average was 100 문제) <60+ will get full credit>

2. **(QnA, 2pt)** Write one good example of your creative or original Note, Comment, Solution or Answer in QnA.

(Example) 제목 : Center of mass를 배우는 이유 - 내용요약

질량중심을 배우는 이유는 질량중심이라는 것이 특정한 상황에서 구하기 쉬울 수 있고, 그 질량중심을 안다면 계산이 쉬워지기 때문이다.

In physics, the center of mass in space is the unique point where the weighted relative position of the distributed mass sums to zero. Calculations in mechanics are simplified when formulated with respect to the center of mass. In the case of a single rigid body, the center of mass is fixed in relation to the body, and if the body has uniform density, it will be located at the centroid. The center of mass may be located outside the physical body. The center of mass is the mean location of all the mass in a system.

그리고 스마트 러닝 환경 http://www.youtube.com/watch?v=Ll1P_57qluo

3. **(Bonus, 2pt)** What you have newly learned and improved yourself from our Honor Calculus with Sage?

(Example) 이 수업에 처음 들어 온지가 엊그제 같은데 벌써 1학기를 마무리 해가고 있습니다. 저는 개인적으로 일반 미분적분학이 아닌 이 고급미분적분학을 들을 수 있어서 다행이었다고 생각합니다. 여러 가지 좋았던 점이 있엇지만 우선 즐기면서 배울 수 있었다는 것 같습니다. 수학을 배운다면 고등학교때 하던 방식이 떠오르는 데요 그 때는 문제집 안에서 수많은 문제를 풀고 유형을 외우고 하는 수업을 하였습니다. 종이에 써져 잇는 복답한 수학은 이해하기도 힘들 었고 또 이해하기 위해 많은 시간을 들여야 했습니다. 하지만 이 수업에서는 개념을 그림이나 여러 다양한 관련 자료를 통해 쉽게 이해할 수 있었고, 보면서 이해하는데 즐거움도 느낄수 있었습니다. 또한 수강생이 적은 것도 하나의 좋았었던 점이였습니다.

이 수업이 다른 수업보다 훨씬 값졌던 이유는 아마 교수님과의 면담을 가질수 있엇던 것일 것입니다. 수업진행 초기에는 저의 시간표가 안 맞아서 교수님의 office hour에 한번 도 참석을 하지 못할 뻔했는데 교수님이 직접 시간이 되게끔 바꾸어 주셔서 몇 번 찾아가 여러 가지 조언을 얻을 수 있었습니다. 그리고 교수님이 여러 가지 자료를 올려주셔서 많은 것을 배울 수 있엇습니다. 예를 들어 색다른 교육법이라든지, 교과서에 없는 푸리에 급수 등을 배울 수 있었습니다. 한 가지 아쉬운 점은 제가 한번 열심히 할 때는 열심히 하지만 평소에 게으른 경향이 있어서 모든 자료를 다 보지 못 한 점입니다. 그럼에도 불구하고 이 수업을 통해 필수적인 수학적 지식을 배울 수 있었고 추가로 다른 상식들과 다양한 교훈 등 많은 것을 배울 수 있었습니다. 여러 가질 생각없이 나열해 놨지만 간단히 말하면 이번에 고급미분적분학을 들을 수 있어서 다행이었다는 것입니다. 다른 수업들 중에서 가장 독특했고 기억에 남는 과목입니다.

Derivatives of Inverse Trigonometric Functions[1]

$$\frac{d}{dx}(\sin^{-1}x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \frac{d}{dx}(\csc^{-1}x)=-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$\frac{d}{dx}(\cos^{-1}x)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \frac{d}{dx}(\sec^{-1}x)=\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$\frac{d}{dx}(\tan^{-1}x)=\frac{1}{1+x^2} \qquad \frac{d}{dx}(\cot^{-1}x)=-\frac{1}{1+x^2}$$

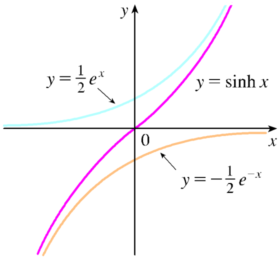
Definition of the Hyperbolic Functions[2]

$$\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2} \qquad \cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

$$\tanh x=\frac{\sinh x}{\cosh x}=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} \qquad \coth x=\frac{\cosh x}{\sinh x}=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$$

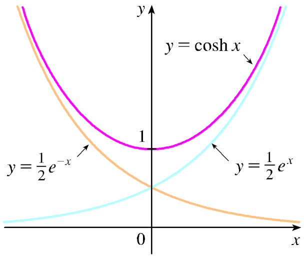
$$\operatorname{sech} x=\frac{1}{\cosh x}=\frac{2}{e^x+e^{-x}} \qquad \operatorname{csch} x=\frac{1}{\sinh x}=\frac{2}{e^x-e^{-x}}$$

The graphs of the hyperbolic sine and cosine can be sketched using graphical addition as in Figures 8 and 9.



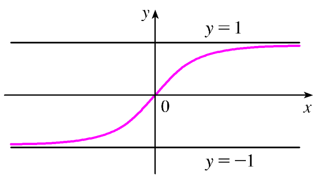
$y=\sinh x=\frac{1}{2}e^x-\frac{1}{2}e^{-x}$

Figure 8



$y=\cosh x=\frac{1}{2}e^x+\frac{1}{2}e^{-x}$

Figure 9



$y=\tanh x$

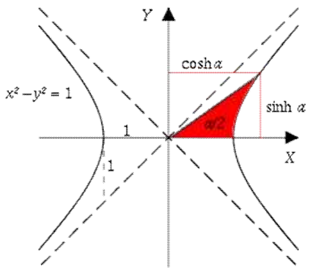
Figure 10

Derivatives of the Hyperbolic Functions

$$\frac{d}{dx}(\sinh x)=\cosh x \qquad \frac{d}{dx}(\coth x)=-\operatorname{csch}^2 x$$

$$\frac{d}{dx}(\cosh x)=\sinh x \qquad \frac{d}{dx}(\operatorname{sech} x)=-\operatorname{sech} x\tanh x$$

$$\frac{d}{dx}(\tanh x)=\operatorname{sech}^2 x \qquad \frac{d}{dx}(\operatorname{csch} x)=-\operatorname{csch} x\coth x$$



Relationship to the exponential function

Definition of the Inverse Hyperbolic Functions

$\sinh^{-1}x=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$	$(x\in R)$
$\cosh^{-1}x=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$	$(x\geq 1)$
$\tanh^{-1}x=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$	$(\lvert x\rvert<1)$
$\coth^{-1}x=\frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}$	$(\lvert x\rvert>1)$
$\operatorname{sech}^{-1}x=\ln\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right)$	$(0<x<1)$
$\operatorname{csch} x=\ln\left(\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{1-x^2}}{\lvert x\rvert}\right)$	$(x\neq 0)$

Derivatives of the Inverse Hyperbolic Functions

$\frac{d}{dx}(\sinh^{-1}x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$(x\in R)$
$\frac{d}{dx}(\cosh^{-1}x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$(x>1)$
$\frac{d}{dx}(\tanh^{-1}x)=\frac{1}{1-x^2}$	$(\lvert x\rvert<1)$
$\frac{d}{dx}(\coth^{-1}x)=\frac{1}{1-x^2}$	$(\lvert x\rvert>1)$

The volume of the solid obtained by rotating about the y-axis the region under the curve $y=f(x)$ from a to b, is

$$\int_a^b (2\pi x)\quad [f(x)]\quad dx \qquad \text{where} \qquad 0\leq a<b\ .$$

(circumference) · (height) · (thickness of shell).

Formula for the area A of the polar region R is $A=\int_a^b \frac{1}{2}[f(\theta)]^2 d\theta$. Since $r=f(\theta)$, it may be written as

$$A=\int_a^b \frac{1}{2}r^2 d\theta.$$

Sage Calculus Grapher : http://matrix.skku.ac.kr/cal-lab/sage-grapher.html

1) http://www.math.ucdavis.edu/~kouba/CalcOneDIRECTORY/invtrigderivdirectory/InvTrigDeriv.html
2) http://en.wikipedia.org/wiki/Hyperbolic_function

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$ $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$ $\int e^x dx = e^x + C$ $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ a > 0$

$\int \sin x\, dx = -\cos x + C$ $\int \cos x\, dx = \sin x + C$ $\int \sec^2 x dx = \tan x + C$ $\int \csc^2 x\, dx = -\cot x + C$

$\int \sec x \tan x\, dx = \sec x + C$ $\int \csc x \cot x\, dx = -\csc x + C$ $\int \tan x\, dx = \ln|\sec x| + C$

$\int \cot x\, dx = \ln|\sin x| + C$ $\int \sinh x\, dx = \cosh x + C$ $\int \cosh x\, dx = \sinh x + C$

$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C,\quad |x| \leq |a|$ and $a > 0$ $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \frac{1}{a} \sec^{-1}\left|\frac{x}{a}\right| + C,\ |x| \geq a > 0$

$\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C,\quad a \neq 0$ $\int \frac{1}{(x-a)^n} dx = \begin{cases} -\frac{1}{(n-1)(x-a)^{n-1}} & (n \neq 1) \\ \ln|x-a| & (n = 1) \end{cases}$

$$\int \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} dx = \begin{cases} -\frac{1}{2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}} & (n \neq 1) \\ \frac{1}{2}\ln|x^2 + a^2| & (n = 1) \end{cases}$$

Table of Integration Formulas [Constant of integration is omitted.]

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ $(n \neq -1)$ 2. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x|,\ x \neq 0$ 3. $\int e^x dx = e^x$ 4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a},\ a > 0$

5. $\int \sin x\, dx = -\cos x$ 6. $\int \cos x\, dx = \sin x$ 7. $\int \sec^2 x\, dx = \tan x$ 8. $\int \csc^2 x\, dx = -\cot x$

9. $\int \sec x \tan x\, dx = \sec x$ 10. $\int \csc x \cot x\, dx = -\csc x$ 11. $\int \sec x\, dx = \ln|\sec x + \tan x|$

12. $\int \csc x\, dx = \ln|\csc x - \cot x|$ 13. $\int \tan x\, dx = \ln|\sec x|$ 14. $\int \cot x\, dx = \ln|\sin x|$

15. $\int \sinh x\, dx = \cosh x$ 16. $\int \cosh x\, dx = \sinh x$ 17. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right),\ a \neq 0$

18. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right),\ a \neq 0$ 19. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|,\ a \neq 0$ 20. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}|$

Midpoint Rule

$\int_a^b f(x)dx \approx M_n = \Delta x[f(\overline{x_1}) + f(\overline{x_2}) + \cdots + f(\overline{x_n})]$ where $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ and $\overline{x_i} = \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i)$ = midpoint of $[x_{i-1}, x_i]$.

The Trapezoidal Rule

$\int_a^b f(x)dx \approx T_n = \frac{\Delta x}{2}[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]$ where $\Delta x = (b-a)/n$ and $x_i = a + i\Delta x$.

http://matrix.skku.ac.kr/cal-lab/Area-Sum.html

(Composite) Simpson's Rule

$\int_a^b f(x)dx \approx S_n = \frac{\Delta x}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \cdots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)]$

where n is even and $\Delta x = (b-a)/n$.

4 **Error Bound for Simpson's Rule**

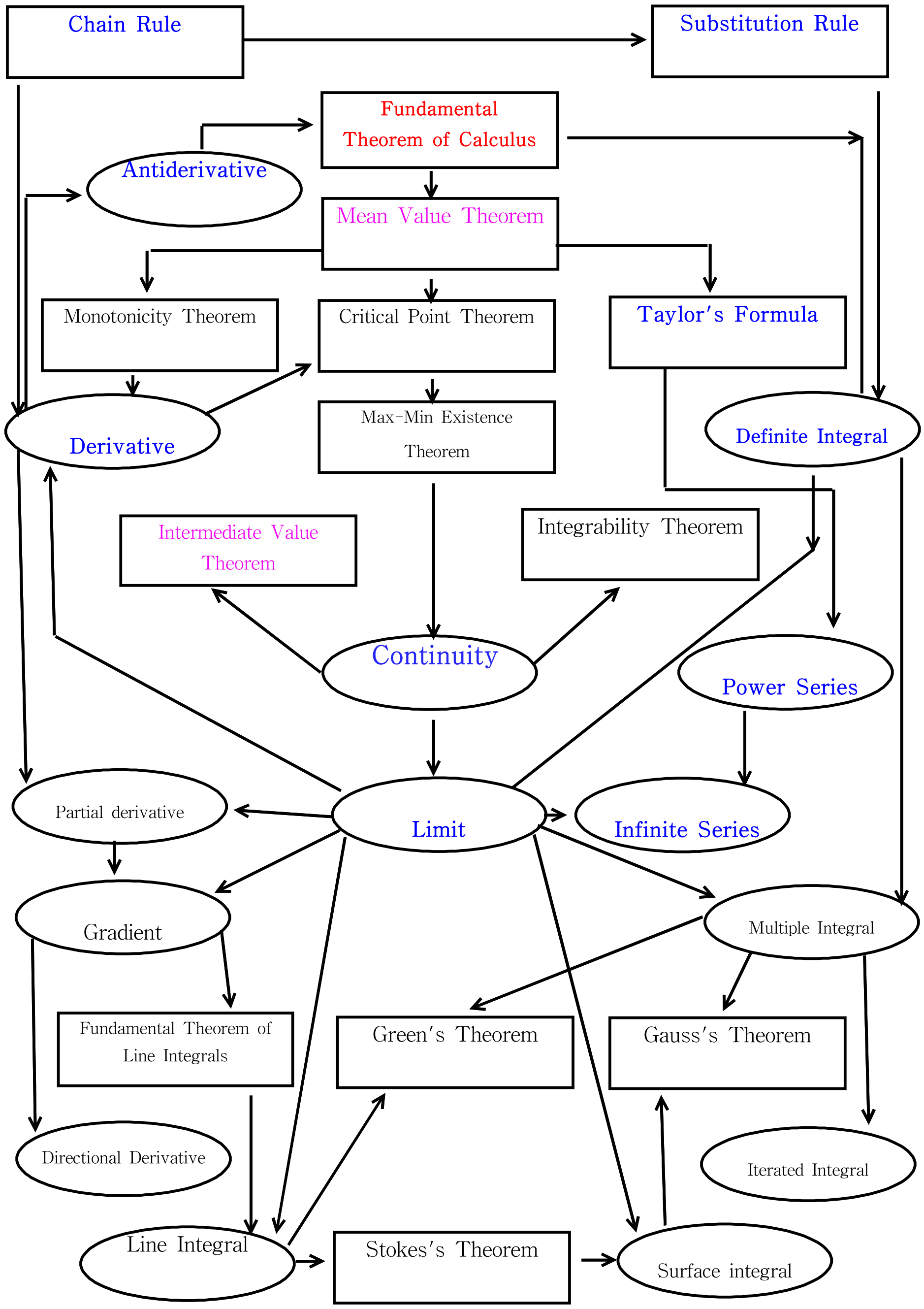
Assume that $|f^{(4)}(x)| \leq K$ for $a \leq x \leq b$. Let E_S be the error involved in using Simpson's Rule, then

$$|E_S| \leq \frac{K(b-a)^5}{180n^4}.$$

The symbol $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ is defined by the equation $\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{t \to -\infty} \int_t^b f(x)dx$.

The improper integrals $\int_a^\infty f(x)dx$ and $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ are called **convergent** if the corresponding limit exists; otherwise they are called **divergent**.

미적분의 관계도 by SGLee



Taylor, Maclaurin, and Binomial Series

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots, \qquad (-\infty,\ \infty)$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots, \qquad (-\infty,\ \infty)$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots, \qquad (-\infty,\ \infty)$$

$$(1+x)^k = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!}x^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k}{n} x^n,$$

where $\binom{k}{n} = \frac{k(k-1)\cdots(k-n+1)}{n!}$ $(n \geq 1)$ and $\binom{k}{0} = 1$. (if k is any real number and $|x| < 1$)