(2005/12/19 19:30시~20:30) **성균관대 선형대수학 Final 종합시험** [채점용답안]

담당교수: 학과(학부) 학번: 이름: 확인: 점수

**I. (3*10=30점) 맞으면 (T)를 틀리면 (F)를 쓰시오. 단, 주어진 모든 행렬들은 $n$차 정방행렬들이다.**

(T ) 1. $A$ 와 $B$가 닮은(similar) 행렬이면 같은 고유값들을 갖는다.

(F) 2. $A$가 대칭행렬이면 $n$개의 서로 다른 실수인 고유값을 갖는다.

(F) 3. 집합 $\{(1,0,0,-1),(1,2,-1,1),(0,-1,2,0)\}$은 직교집합이다.

(T) 4. 행렬 $A,B$가 가역이고 $AB=BA$이면 $AB^{-1}=B^{-1}A$이다.

(F) 5. $A$가 직교행렬이면 $|A|=1$ 이다.

(T) 6. 선형변환 $T: R^n \to R^n$ 가 단사이고 $T(\mathbf{u}-\mathbf{v})=\mathbf{0}$ 이면 $\mathbf{u}=\mathbf{v}$ 이다.

(T) 7. 행렬 $A$ 의 하나의 고유값 $\lambda_i$에 대응하는 고유공간은 $(A-\lambda_i I)\mathbf{x}=\mathbf{0}$의 해공간이다.

(T) 8. $S=\{\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v}_k\}$ 이 $R^n$ 을 생성하면, $k\ge n$ 이다.

(T) 9. 행렬 $A$ 의 고유값 중 0인 것이 포함되면 $A$는 비가역행렬이다.

(T) 10. $R^n$ 상에는 일차종속이며 동시에 정규직교인 벡터들의 집합은 존재하지 않는다.

**II. (5점) 다음 중 하나를 골라 정확히 서술하시오.**

(1) Cramer 의 공식 (2) Laplace 여인자 전개식

(3) 정사영정리 (4) Rank-Nullity 정리

(5) Gram-Schimidt 정규직교화과정

교제 참고

**III. (10*10=100점) Find 또는 Prove.**

1. 행렬 $A=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$에 대하여 $\det(A)=5$ 일 때, 다음을 구하시오. $\det\begin{bmatrix} a_1-2b_1 & a_2-2b_2 & a_3-2b_3 \\ -4c_1 & -4c_2 & -4c_3 \\ 3b_1 & 3b_2 & 3b_3 \end{bmatrix}$

행렬식의 성질을 이용하면 다음과 같다:

$-(-4)(3)\det(A)=60$

2. 특성방정식이 $p_A(\lambda)=\lambda(\lambda+1)(\lambda-2)^2(\lambda+3)^5$ 인 행렬 $A$의 크기와 각 고유값에 대한 대수적 중복도는?

(1) 행렬 $A$의 크기=1+1+2+5=9

(2) 고유값 $\lambda$의 대수적 중복도를 $m(\lambda)$라 하면 다음과 같다:

$m(0)=1,\quad m(-1)=1,$

$m(2)=2,\quad m(-3)=5$

3. 행렬 $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 9 & 0 & 7 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 8 \\ 2 & 2 & 8 & -3 & 5 \end{bmatrix}$ 의 rank를 구하고, ($A$의 열들로 이루어진) $A$의 열공간의 기저를 하나 구하시오.

$\mathrm{REF}(A)=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$이므로 $A$의 rank는 3이고, $A$의 열공간의 기저는 다음과 같다:

$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 9 & 0 & 7 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 8 \\ 2 & 2 & 8 & -3 & 5 \end{bmatrix}$의 1,2,4열 $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}\right\}$이다.

(별해) $A$의 열공간은 $A^T$ 의 행공간과 같으므로 $A^T$ 의 RREF를 구하면 다음과 같다: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 따라서 $A$의 열공간의 기저는 $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$

4. 다음 선형변환 $T$의 핵(kernel)을 구하여 $T$가 단사인지 아닌지를 결정하시오.

$T(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_3,\ 2x_2+x_3,\ 5x_3)$

$\ker(T)=\{\ \mathbf{x}\in R^3 \mid T(\mathbf{x})=\mathbf{0}\ \}$

$=\left\{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\in R^3 \mid x_1-x_3=0, 2x_2+x_3=0, 5x_3=0\right\}$

$=\{(0,0,0)\}$

이므로 $T$ 는 단사이다.

5. $\mathbf{x}_1=(1,1,0)$, $\mathbf{x}_2=(-1,0,1)$일 때 Gram-Schmidt 정규직교화 과정을 이용하여 집합 $S=\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}$를 기저로 갖는 $R^3$ 의 부분공간 $W$ 의 정규직교기저 $Z=\{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2\}$를 구하시오.

$\mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_1=(1,1,0)$

$\mathbf{y}_2 = \mathbf{x}_2 - \mathrm{proj}_{W_1}\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_2 - \dfrac{\mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{y}_1}{\|\mathbf{y}_1\|^2}\mathbf{y}_1$

$=(-1,0,1)-\left(-\frac{1}{2}\right)(1,1,0)=\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$

$\therefore\ \mathbf{z}_1=\dfrac{\mathbf{y}_1}{\|\mathbf{y}_1\|}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$.

$\mathbf{z}_2=\dfrac{\mathbf{y}_2}{\|\mathbf{y}_2\|}=\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$

6. 선형변환 $T: R^2 \to R^3$ 를

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} 2x+y \\ x-y \\ x+4y \end{bmatrix}$$

라 정의하고 $R^2$ 와 $R^3$ 의 순서 기저를 각각 $\alpha=\{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1\}$, $\beta=\{\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1\}$ 라 할 때, $A'=[T]_\alpha^\beta$ 를 구하시오.

$T(\mathbf{e}_2)=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$, $T(\mathbf{e}_1)=\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 이므로,

$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}_\beta=\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}_\beta=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

따라서 $A'=[T]_\alpha^\beta=\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

7. 행렬 $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ 에 대하여 다음에 답하시오.

(1) $A$ 가 대각화 가능한 이유는?

(2) $A$ 를 대각화하는 행렬 $P$를 구하시오.

(3) $A$ 를 대각화하시오.

(1) $A$ 의 고유값이 1, -1, 2 로서 3개가 모두 다르므로 $A$ 는 대각화가능하다.

(2) $P=\begin{bmatrix} 1 & -1 & \frac{13}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$ (3) $P^{-1}AP=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

8. $R^n$ 의 두 벡터 $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ 의 끝점을 지나는 직선을 매개방정식 $\mathbf{x}=(1-t)\mathbf{p}+t\mathbf{q}$ ( $t\in R$ ) 로 정의한다.
$T: R^n \to R^n$ 가 선형변환일 때 $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ 를 잇는 선분 $(1-t)\mathbf{p}+t\mathbf{q}$ ( $0\le t\le 1$ )의 이미지는 선분임을 증명하시오. (특히 $T(\mathbf{p})=T(\mathbf{q})$ 이면 이미지는 한 점이 된다.)

$T$ 가 $R^n$ 상의 선형변환이므로 $0\le t\le 1$ 인 모든 $t$ 에 대하여 다음과 같다:

$T((1-t)\mathrm{p}+t\mathrm{q})=(1-t)T(\mathrm{p})+tT(\mathrm{q})$

즉, 선분 $(1-t)\mathbf{p}+t\mathbf{q}$ 은 선형변환 $T$ 에 의하여 그 이미지는 $T(\mathrm{p})$ 와 $T(\mathrm{q})$를 잇는 선분이다.

9. 행렬 $A$가 대각화 가능하면 행렬 $A^n$ (단, $n$은 자연수)도 대각화 가능함을 보이시오.

행렬 $A$가 대각화 가능하므로 $P^{-1}AP=D$ 인 가역행렬 $P$ 와 대각행렬 $D$ 가 존재한다.
따라서 $A=PDP^{-1}$ 로부터 $A^n=PD^nP^{-1}$ 이므로 $P^{-1}A^nP=D^n$ 이다. 여기서 $D^n$ 도 대각행렬이므로 $P^{-1}A^nP$가 대각행렬이 되게 하는 가역행렬 $P$ 가 존재하므로 정의에 의하여 $A^n$ 도 대각화 가능하다.

10. $T: R^n \to R^n$ 가 $R^n$ 위의 선형변환이면 다음 두 명제는 동치임을 보이시오.

(1) $\|T(\mathbf{x})\|=\|\mathbf{x}\|$, $\mathbf{x}\in R^n$

(2) $T(\mathbf{x})\cdot T(\mathbf{y})=\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}$, $\mathbf{x}, \mathbf{y}\in R^n$

(1) $\Rightarrow$ (2): $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ 를 $R^n$ 의 임의의 벡터라 하면,

$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2=(\mathbf{x}+\mathbf{y})\cdot(\mathbf{x}+\mathbf{y})$

$\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2=(\mathbf{x}-\mathbf{y})\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})$ 이므로,

$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}=\frac{1}{4}(\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2-\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2)$ 임을 알 수 있다.

따라서

$T(\mathbf{x})\cdot T(\mathbf{y})=\frac{1}{4}(\|T(\mathbf{x})+T(\mathbf{y})\|^2-\|T(\mathbf{x})-T(\mathbf{y})\|^2)$

$=\frac{1}{4}(\|T(\mathbf{x}+\mathbf{y})\|^2-\|T(\mathbf{x}-\mathbf{y})\|^2)$

$=\frac{1}{4}(\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2-\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2) = \mathbf{x}\cdot\mathbf{y}$

(2) $\Rightarrow$ (1) :

$\|\mathbf{x}\|=\sqrt{\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}}$ 로 쓸 수 있으므로,

$\|T(\mathbf{x})\|=\sqrt{T(\mathbf{x})\cdot T(\mathbf{x})}=\sqrt{\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}}=\|\mathbf{x}\|$