

전공: 학년: 학번: Name : 성적: /90 + /10 = /100

I. 맞으면 (T) or 틀리면 (F) 표 하시오. 2*9 = 18 점

(F) 1. $\{\cos^2 x, \sin^2 x, 1, e^x\}$ 은 벡터공간 $C(\mathbb{R})$ 에서 일차독립이다.

Sol) $c_1=1, c_2=1, c_3=-1, c_4=0$ 이라면

$$c_1 \cos^2 x + c_2 \sin^2 x + c_3 + c_4 e^x = 0 \text{ 이 성립한다.}$$

하지만 $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 \neq 0$ 이므로 $\{\cos^2 x, \sin^2 x, 1, e^x\}$ is not linearly independent.

(F) 2 $\{A \in M_{n \times n}(\mathbb{R}) \mid A^T = A^{-1}\}$ 은 벡터공간 $M_{n \times n}(\mathbb{R})$ 의 부분공간이다.

Sol) Let $D = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A^T = A^{-1}\} \subseteq M_{n \times n}(\mathbb{R})$.

Let $A, B \in D$

① 덧셈에 관하여 닫혀있는지 보자

$$(A + B)^T = A^T + B^T \text{ but}$$

$$(A + B)^{-1} \neq A^{-1} + B^{-1} = A^T + B^T$$

$$\therefore A + B \notin D$$

② [Show: scalar 곱셈에 닫혀있다.]

$$(kA)^{-1} = \frac{1}{k} A^{-1} \neq (kA)^T = kA^T$$

$$\therefore kA \notin M_{n \times n}(\mathbb{R})$$

덧셈과 곱셈에 닫혀있지않다(not a subspace)

Ans : \therefore False.

(F) 3. If U and W are subspaces of a vector space V with bases α and β respectively, then the intersection $\alpha \cap \beta$ is a basis for $U \cap W$.

답: No

(반례) Let $\alpha = \{c_1, c_2\}, \beta = \{c_2 + c_3, c_3\}$

$\rightarrow \alpha \cap \beta = \emptyset$ and $U \cap W$ is not empty set.

\therefore False!

(F) 4. Any two-equivalent matrices have the same column space.

답: No (False)

$$E_k E_{k-1} \cdots E_2 E_1 A = B$$

A와 B는 행동치이므로 $R(A) = R(B)$.

그러나 $R(A) \neq C(A)$ 이다.(단지 dim이 같을 뿐이다.)

(T) 5. For any $m \times n$ matrix A, $\dim C(A) + \dim N(A^T) = m$

Sol) (p.101 Coro 3.17)

pf) $\dim C(A) + \dim N(A^T) = m$
 $= \dim R(A^T) + \dim N(A^T) = m$

$REF(A^T)$ 에서 free variable + basic variable = m 이다

$\dim R(A^T)$ (basic variable의 개수) + $\dim N(A^T)$ (free variable의 개수)

$= m$ (A^T 의 col의 개수)

$\therefore \dim C(A) + \dim N(A^T) = m$

\therefore True

(T) 6. A linear transformation $T: R^n \rightarrow R^m$ is one-to-one if and only if the nullspace of $[T]_\alpha^\beta$ is $\{0\}$ for any basis α for R^n and any basis β for R^m .

Yes.

matrix presentation of T w.r.t α and β 가 A 라 하면

$$\vec{x} \in R^n, \vec{b} \in R^m \Rightarrow A\vec{x} = \vec{b} = T(\vec{x}) = [T]_\alpha^\beta \vec{x}$$

(\Rightarrow) $T: R^n \rightarrow R^m$ is one-to-one $\Rightarrow A\vec{x} = \vec{0}$ 가 유일해 $\vec{0}$ 을 갖는다. 따라서 the nullspace of $[T]_\alpha^\beta$ 는 $\{0\}$ 이다.

(\Leftarrow) For 임의의 기저 α for R^n 와 β for R^m 에 대해, $T(x) = T(y) \Rightarrow T(x - y) = 0$ 이고 the nullspace of $[T]_\alpha^\beta$ 는 $\{0\}$ 이므로 $x - y = 0$ and $x = y$, 즉, T 는 one-to-one 이다.

(T) 7. If a linear transformation $T: R^n \rightarrow R^n$ is one-to-one, then any matrix representation of T is nonsingular.

Yes $T: R^n \rightarrow R^n$ is one-to-one $\Rightarrow T(\vec{x}) = A\vec{x} = \vec{0}$ 가 유일해 $\vec{0}$ 을 갖고 A 는 정사각행렬이다. 따라서 A 는 Full rank를 갖고, nonsingular 이다.

참고 : $T: R^n \rightarrow R^m$ 일 경우는 A 는 정사각행렬이 아닐 수 있기 때문에 가역성을 얘기 못한다.

(T) 8. Any $m \times n$ matrix A can be a matrix representation of $T: R^n \rightarrow R^m$.

(T) 9. R^3 안의 벡터들 $v_1 = (1, 2, 1), v_2 = (2, 9, 0), v_3 = (3, 3, 4)$ 의 집합 S는 기저를 이룬다.

i) [Show L · I]

$a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 = 0$ then

$\Leftrightarrow a_1(1, 2, 1) + a_2(2, 9, 0) + a_3(3, 3, 4) = 0$

$\Leftrightarrow (a_1 + 2a_2 + 3a_3, 2a_1 + 9a_2 + 3a_3, a_1 + 4a_3) = 0$

$\Leftrightarrow a_1 + 2a_2 + 3a_3 = 0, 2a_1 + 9a_2 + 3a_3 = 0, a_1 + 4a_3 = 0$

$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 9 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} \quad -2R_1 + R_2 \rightarrow R_2, -R_1 + R_3 \rightarrow R_3$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \frac{2}{5} R_2 + R_3 \rightarrow R_3$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore a_1=0, a_2=0, a_3=0$$

ii) Show $\langle S \rangle = R^3$

For any $X=(x_1, x_2, x_3)$ in R^3 , [Show $\exists a_1, a_2, a_3$ s.t. $a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 = X$]

(증명)

$$a_1(1, 2, 1) + a_2(2, 9, 0) + a_3(3, 3, 4) = (x_1, x_2, x_3)$$

$$\Leftrightarrow a_1 + 2a_2 + 3a_3 = x_1, \quad 2a_1 + 9a_2 + 3a_3 = x_2, \quad a_1 + 4a_3 = x_3$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \vdots & x_1 \\ 2 & 9 & 3 & \vdots & x_2 \\ 1 & 0 & 4 & \vdots & x_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \vdots & x_1 \\ 0 & 5 & -3 & \vdots & -2x_1 + x_3 \\ 0 & -2 & 1 & \vdots & -x_1 + x_3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \vdots & x_1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & \vdots & \frac{-2x_1 + x_3}{5} \\ 0 & -2 & 1 & \vdots & -x_1 + x_3 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \vdots & x_1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & \vdots & \frac{-2x_1 + x_3}{5} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{5} & \vdots & \frac{-9x_1 + 2x_2 + 5x_3}{5} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \vdots & x_1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & \vdots & \frac{-2x_1 + x_3}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 9x_1 - 2x_2 - 5x_3 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & \vdots & -26x_1 + 6x_2 + 15x_3 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 5x_1 - x_2 - 3x_3 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 9x_1 - 2x_2 - 5x_3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & -36x_1 + 8x_2 + 21x_3 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 5x_1 - x_2 - 3x_3 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 9x_1 - 2x_2 - 5x_3 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -36x_1 + 8x_2 + 21x_3 \\ 5x_1 - x_2 - 3x_3 \\ 9x_1 - 2x_2 - 5x_3 \end{bmatrix}$$

이므로 모든 x_1, x_2, x_3 에 대하여 항상 a_1, a_2, a_3 가 존재한다.

$\therefore v_1, v_2, v_3$ 는 R^3 의 기저이다. \square

II. 빈칸을 채우시오. 3*8 = 24 점

(1) 실수 값 함수 $f: M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ 가 아래 3가지 성질을 만족하면 determinant 함수라 한다:

if (1) $f(I) = 1$

(2) 행렬의 행이 바뀌면 함수 f 값의 부호가 바뀐다.

(3) f 는 첫째 행에 대한 선형 함수이다. (더구나 이 함수는 언제나 유일하게 존재한다.) 더구나, 이러한 함수는 언제나 “유일하게 존재한다.“ 그래서 determinant를 “The determinant“라 하고 \det 라 표기한다.

(2) $R(A) = \text{row space of } A = \langle A_{(1)}, \dots, A_{(m)} \rangle, \quad C(A) = \text{col space of } A = \langle A^{(1)}, \dots, A^{(n)} \rangle = \{Ax: x \in \mathbb{R}^n\} = R(A^T), \quad N(A) = \text{Null space } (A) = \{Ax=0 \text{ 의 해공간}\}, \text{ nullity of } A = \dim(\text{Null space}(A)) \text{ 이다.}$

이때 Thm 3.15 (1st Fundamental Theorem)

$$\forall A \in M_{m \times n}, \dim R(A) = \dim C(A^T)$$

(3) Coro 3. 17 (Rank Theorem) $\forall A \in M_{m \times n}$

$$\dim R(A) + \dim N(A) = \text{rank } (A) + \text{nullity } (A) = \text{dimension of Domain} = n$$

(즉, basic 변수의 개수 + free 변수의 개수 = domain 의 차원)

(4) A 대신 A^T 를 넣으면 아래를 얻는다.

$$\dim C(A) + \dim N(A^T) = \text{rank } (A) + \text{nullity } (A^T) = m = \# \text{ of } A \text{의 row's}$$

(5) Wronskian 에 대해 아는 바를 서술하시오

$$\begin{bmatrix} f(x) & g(x) & \dots & h(x) \\ f'(x) & g'(x) & \dots & h'(x) \\ f''(x) & g''(x) & \dots & h''(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}_{nm} \quad \text{의 형태로 이루어진 행렬을 생각하자}$$

예를 들어 $\begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) \\ f'(x) & g'(x) & h'(x) \\ f''(x) & g''(x) & h''(x) \end{vmatrix} \neq 0$ for some x_0 일 경우 $f(x), g(x), h(x)$ 는 모두 linearly independent를 Wronski 가 보인 것이다. 이 내용을 증명하면.

$$\begin{bmatrix} f(x) & g(x) & h(x) \\ f'(x) & g'(x) & h'(x) \\ f''(x) & g''(x) & h''(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{인 행렬을 생각해 보면,}$$

$$\begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) \\ f'(x) & g'(x) & h'(x) \\ f''(x) & g''(x) & h''(x) \end{vmatrix} \neq 0 \text{ for some } x_0 \text{ 이라면. Let } c_1 f(x) + c_2 g(x) + c_3 h(x) = \vec{0}$$

$\Rightarrow c_1 f(x_0) + c_2 g(x_0) + c_3 h(x_0) = \vec{0}$ 그 점에서 해 $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ 는 trivial solution 이어야만 한다. 따라서 $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ 리다. $f(x), g(x), h(x)$ 가 linearly independent 이다.

(6) Note : Let $\alpha = \{ \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \}$ be an "ordered basis" for a v.s V of dim n . Let $\epsilon = \{ e_1, e_2, \dots, e_n \}$ be the "standard basis" for \mathbb{R}^n .

$\Rightarrow \exists$ isomorphism $T : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ by $T(\vec{v}_i) = e_i \quad \forall i$ (이것이 $[Id]_{\epsilon}^{\alpha}$)
 이를 "the natural isomorphism w.r.t α " 라 한다.

$$\vec{x} = \sum a_i \vec{v}_i \in V \text{ 일 때, } \quad [\vec{x}]_{\alpha} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \text{ 이고, } \quad [T(\vec{x})]_{\epsilon} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \text{ 이다.}$$

(7) \forall L.T $T : V_n \rightarrow W_m \quad \exists!$ matrix $A \in M_{m,n} \quad \ni \quad T(\vec{x}) = A \vec{x} \quad \forall \vec{x} \in V_n$

(8) 정리 4.9 : Let L.T $T : V_n \rightarrow W_m$ with ordered basis

$$\alpha = \{ \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n \}, \quad \beta = \{ \vec{w}_1, \dots, \vec{w}_m \}$$

$$\Rightarrow \exists! a_{ij}'s \ni T(\vec{v}_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} \vec{w}_i \quad \forall 1 \leq j \leq n$$

$$\Rightarrow [T(\vec{v}_j)]_{\beta} = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}_{m \times 1} \quad (\cong, \text{ coordinate vector of } T(\vec{v}_j) \text{ w.r.t } \beta)$$

Let $A \equiv [a_{ij}] \in M_{m,n}$

$$[\text{그러면 } [T(\vec{x})]_{\beta} = A[\vec{x}]_{\alpha} \quad \forall \vec{x} \in V \text{ 이다.}]$$

위의 matrix A 를 "T의 matrix representation w.r.t basis α and β
 (또는 T의 associated 행렬 w.r.t basis α and β)"이라 하고

$$A = [T]_{\alpha}^{\beta} \text{ 라 쓴다.}$$

즉, "T의 matrix representation w.r.t basis $\alpha = \{ \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n \}$ and β 은

$$A = [T]_{\alpha}^{\beta} = [[T(\vec{v}_1)]_{\beta} \mid \dots \mid [T(\vec{v}_n)]_{\beta}]_{m \times n} \text{ 이다.}$$

Note : $[T(\vec{x})]_{\beta} = [T]_{\alpha}^{\beta} [\vec{x}]_{\alpha}$, $[T]_{\alpha}^{\alpha} = [T]_{\alpha}$ (my method)

$$[T]_{\alpha}^{\beta} = ([I]_{\beta}^{\epsilon'})^{-1} [T]_{\epsilon}^{\epsilon'} [I]_{\alpha}^{\epsilon} = [I]_{\epsilon}^{\beta} \cdot [T]_{\epsilon}^{\epsilon'} [I]_{\alpha}^{\epsilon}$$

$\epsilon = \epsilon'$ 일 때 $B = S^{-1}AS$ 인 similar 행렬의 개념이 여기서 나온다.

III. Find or 빈칸을 채워라. 4*7 = 28 점

1. 문제 .28 Find a polynomial $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$ that satisfies
 $p(0) = 1, p'(0) = 2, p(1) = 4, p'(1) = 4$.

Sol)

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ a + b + c + d = 4 \\ c + 2c + 3d = 4 \end{cases} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} \Rightarrow (\text{첨가행렬}) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore a = 1, b = 2, c = 1, d = 0 \quad \therefore p(x) = 1 + 2x + x^2$$

2. (예 3.18) $W = \{ X_1 = (1, -2, 5, -3), X_2 = (0, 1, 1, 4), X_3 = (1, 0, 1, 0) \} \subseteq R^4$ 일 때 $\text{span } W$ 의 dimension은?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(\text{REF}) \rightarrow U = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5/6 \end{bmatrix}$$

=> 3개의 L.I vectors

=> $\dim V = 3$

3. (3.13) R^3 에서, $W = \{ (x_1, x_2, x_3) : x_1 - x_2 - x_3 = 0 \}$ 는 R^3 의 부분공간이다.

그러면 $x_1 - x_2 - x_3 = 0$, $x_2 = s$, $x_3 = t \Rightarrow x_1 = s + t$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s+t \\ s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} t \text{ 이므로 } W \text{ 의 기저는}$$

$\{ (1, 1, 0), (1, 0, 1) \}$ 이다

4. (3.21) (1) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 의 rank는 3 이고,

the largest invertible submatrix 는 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 이다.

5. (Prob. 4.2의 수정) $\{ \text{대각행렬 } A \in M_n(R) : \text{tr}(A) = 0 \}$ 은 $M_n(R)$ 의 $n-1$ 차원인 부분공간이다. 이 공간의 a basis를 E_{ij} (ij 성분만 1이고 나머지는 모두 0인 행렬)을 이용하여 집합으로 표시하면?

— $\{E_{ii} - E_{nn} : i=1, \dots, n-1\}$ —

6. (예 4.15) Let $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ by $T[x, y] = (x+2y, 0, 2x+3y)$ w.r.t. standard basis \mathcal{E} and \mathcal{E}' resp. Find $[T]_{\mathcal{E}'}^{\mathcal{E}}$

Sol) $[T]_{\mathcal{E}'}^{\mathcal{E}} = [[T(e_1)]_{\mathcal{E}'} \mid [T(e_2)]_{\mathcal{E}'}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ since

$$T(e_2) = T(0, 1) = (2, 0, 3) = 2e_1 + 0e_2 + 3e_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$T(e_1) = T(1, 0) = (1, 0, 2) = 1e_1 + 0e_2 + 2e_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

7. (예 4.20) Let L.T $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ by $T \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 \\ -x_2 \end{bmatrix}$

Let $\alpha = \{e_1, e_2, e_3\}$ 는 \mathbb{R}^3 의 표준기저이고, $\beta = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ 는 \mathbb{R}^3 의 다른 기저이다.

그러면 $[T]_{\alpha} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ 이며, $Q^{-1} = [Id]_{\beta}^{\alpha} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $Q = [Id]_{\alpha}^{\beta} =$

$\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 이다. 이때 Find $[T]_{\beta}$

$$\therefore [T]_{\beta} = [Id]_{\alpha}^{\beta} [T]_{\alpha} [Id]_{\beta}^{\alpha} = Q [T]_{\alpha} Q^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 8 \\ -1 & 4 & 6 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{답}$$

IV. Prove (증명을 완성하십시오) 4*5 = 20 점

1. (수업) Prove $\det(AB) = \det(A) \det(B)$

(Proof)

i) If A is singular, then AB is also singular.

So $\det(AB) = 0 = \det(A) \det(B)$.

(Lemma : $\det(EC) = \det(E) \det(C)$ for any matrix C and elementary matrix E .)

ii) If A is nonsingular, then $A = E_n \cdots E_2 E_1$, a product of elementary matrices

Hence ,
$$\begin{aligned} \det(AB) &= \det(E_n \cdots E_2 E_1 B) \\ &= \det(E_n) \det(E_{n-1} \cdots E_2 E_1 B) = \dots = \\ &= \det(E_n) \cdots \det(E_2) \det(E_1) \det(B) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \det(E_n \cdots E_2 E_1) \det(B) \\
&= \det(A) \det(B)
\end{aligned}$$

2. The set of all functions f defined on \mathbb{R} such that $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$. 이 (벡터)부분공간임을 보이시오.

증명) Let $F = \{ f \mid \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 \text{ on } \mathbb{R} \} \subseteq C(\mathbb{R})$ and let $f, g \in F$

[Show $f + g \in F$]

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f + g)(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) + \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0 + 0 = 0$$

[Show $kf \in F$ for any $k \in \mathbb{R}$]

$$\lim_{x \rightarrow \infty} kf(x) = k \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = k \cdot 0 = 0$$

$\therefore F$ is a vector space.

3. 문제 4.20 Suppose that A and B are similar $n \times n$ matrices. Show that

(2) $\text{tr } A = \text{tr } B$,

증명 $\text{tr } B = \text{tr } (Q^{-1}AQ)$

$$= \text{tr } ((Q^{-1}A)Q)$$

$$= \text{tr } (Q(Q^{-1}A)) \quad (\because \text{tr } (AB) = \text{tr } (BA) \text{ by p.123 Prob 4.3 })$$

$$= \text{tr } A$$

$\therefore \text{tr } A = \text{tr } B$

4. (3.22) For any nonzero column vectors \mathbf{u}, \mathbf{v} , show that the matrix $A = \mathbf{u}\mathbf{v}^T$ has rank 1. Conversely, every matrix of rank 1 can be written as $\mathbf{u}\mathbf{v}^T$ for some \mathbf{u}, \mathbf{v} .

(Proof) (\Rightarrow) Let $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$

$$A = \mathbf{u}\mathbf{v}^T = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} [v_1 \cdots v_n] = \begin{bmatrix} u_1 v_1 & \cdots & u_1 v_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_n v_1 & \cdots & u_n v_n \end{bmatrix} = v_1 \mathbf{u} + v_2 \mathbf{u} + \cdots + v_n \mathbf{u}$$

$\Rightarrow \{\mathbf{u}\}$ is a basis for $C(A)$. A 의 column space

$\Rightarrow \text{rank } A = 1$

(\Leftarrow)

Let $A \in M_{n \times n}$ and $\text{rank } A = 1$.

suppose $\text{rank } A = 1$

$\Rightarrow \langle \mathbf{u} \rangle = C(A)$. \mathbf{u} 의 span for some scalars v_2, \dots, v_n

$\Rightarrow A = [\mathbf{u} \mid v_2 \mathbf{u} \mid \cdots \mid v_n \mathbf{u}]$.

$$\text{Let } \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}.$$

$$\Rightarrow A = \mathbf{u}\mathbf{v}^T.$$

(별지, 5분-참고자료 이용하여 먼저 작성 한 후 제출하고, 본 시험 시작하세요!)

전공: 학년: 학번: Name : 성적: /10

V. (10점) 참여 확인과 본인의 Project (Term paper) Proposal 에 대해 아래를 채우시오.

1. 본인이 그간 Q&A, 동료학생, “행렬론”강좌등에 기여한 내용을 간단히 서술하세요!

(1) Q&A 개인 약 () 회, 조별 약 ()회 (2) 좋은 질문 또는 Finalized the question등 약 ()회

(3)

(4)

(5)

2. Project Proposal: 주제는 “행렬론”과 “우리겨레 수학”으로 행렬론과 관련된 관심있는 자료를 선정하여 (동료 학생이 관심을 가질 좋은 주제 선정이 중요함) 나름대로 보고서(Term paper)를 만들도록 하면 됩니다.

(0) 보고서 제출 예정 일자: 5월19일 제출 (5월 26일 - 수정본 제출)

(1) 연구하고자 하는 주제 또는 분야의 제목: (사전 허락여부, Yes or No)

(2) 연구 주제의 기본 참고자료 이름 또는 인터넷 사이트 주소 :

(3) 본인은 어떤 식으로 과제를 프로젝트를 수행하려고 합니까?

참고사이트

icampus 행렬론 참고 자료

<http://matrix.skku.ac.kr/sglee/>

<http://matrix.skku.ac.kr/nla/index.html>

<http://matrix.skku.ac.kr/sglee/Projects.htm>

(Bonus) 본인의 10년 후의 모습