성균관대학교 SKKU

역행렬과 행렬식의 응용

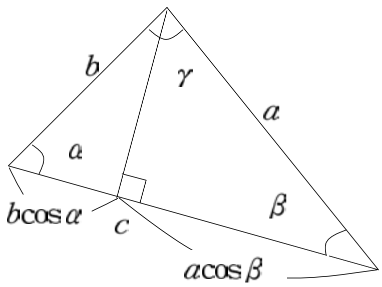
성균관대학교 행렬이론 연구실
지도교수 : 이 상 구

(I) 역행렬의 응용

역행렬을 이용하여 실제 응용문제를 연립방정식으로 만들어 해결하는 예를 살펴보자.

【예 1】 연립 일차방정식을 이용하여 코사인법칙을 유도해보자.

$$\begin{aligned} & & c(\cos\beta)+b(\cos\gamma) &= a \\ c(\cos\alpha) & & +a(\cos\gamma) &= b \\ b(\cos\alpha)+a(\cos\beta) & & &= c \end{aligned}$$



세 변 a, b, c와 마주보는 각(opposite angles) α, β, γ 를 갖는 위의 삼각형을 생각하자. 그러면 삼각비의 정의에 의해 위의 세 식을 얻는다.

이 식으로부터 $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ 를 구해보자. 우선 행렬을 이용한

연립일차방정식 $AX=B$를 만들고 $A=\begin{bmatrix} 0 & c & b \\ c & 0 & a \\ b & a & 0 \end{bmatrix}$의 역행렬을 구한다.

행렬 A의 행렬식은 $2abc$이므로, a, b, c 모두가 0이 아니라면 A는 역행렬을 갖는다.(a, b, c는 삼각형의 세 변의 길이이므로 모두 0은 아니다.) 따라서

$$X=\begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix},\quad A^{-1}=\frac{1}{2abc}\begin{bmatrix} -a^2 & ab & ac \\ ab & -b^2 & bc \\ ac & bc & -c^2 \end{bmatrix}$$

이고 $X=A^{-1}B$ 이므로

$$\cos\alpha=\frac{-a^3+ab^2+ac^2}{2abc}=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$ 를 얻는다.

$\cos\beta$와 $\cos\gamma$도 같은 방법으로 얻을 수 있다.

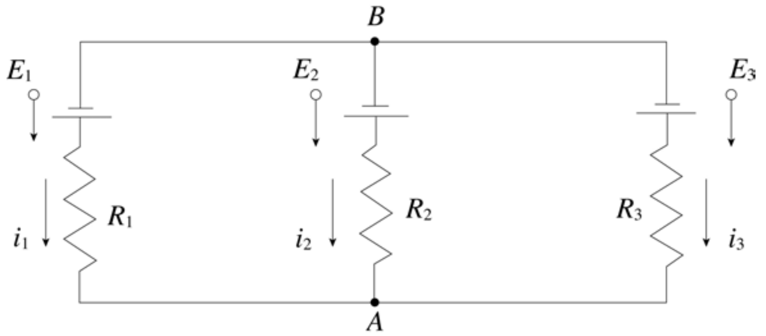
[참고] 주소 http://matrix.skku.ac.kr/sglee/java/linear_eqn.html에서 연립방정식을 풀어보세요!

【예 2】 아래의 간단한 전기회로 다이어그램을 보자.

전지나 발전기에서 만들어내는 전압을 E_1, E_2, E_3로 저항을 R_1, R_2, R_3로 표시하자. 저항은 전기에너지를 열로 바꾸어 준다. 실제로, 전열기나 오븐은 저항의 역할을 한다. 그리고 회로상의 각 경로에 흐르는 전류의 양을 i_1, i_2, i_3로 나타내자. 전압은 볼트로, 저항은 오옴(ohms)으로 측정한다. 전류는 암페어로 측정하는데, 전류가 화살표의 반대방향으로 흐르면 그 전류는 음의 값을 갖는다. 전압과 저항이 주어질 때, 전류의 값을 계산하기 위하여 다음과 같은 Kirchhoff의 법칙을 이용한다.

(1) 회로의 각 경로가 만나는 교점(junction)에서의 전류의 합은 0이다.
(다시 말하자면, 교점으로 흘러 들어오는 모든 전류는 모두 다시 흘러 나가게 된다.)

(2) 전체 회로의 각각의 닫힌 경로에서는 경로상의 전압 E_i들의 합과 저항 R_i들의 합은 항상 같다.



전류 i_1, i_2, i_3는 모두 교점 A로 흘러 들어오므로, 첫 번째 법칙에 의해 $i_1+i_2+i_3=0$을 얻는다. 이 첫 번째 법칙을 교점 B에 적용해도 같은 식을 얻는다.

그림에서 첫 번째 닫힌(closed) 회로를 시계반대 방향으로 돌아가면, 전압의 합은 E_2-E_1, 저항의 합은 $R_2i_2-R_1i_1$이 되므로, 두 번째 법칙에 의하여, $-R_1i_1+R_2i_2=E_2-E_1$. 마찬가지로 두 번째 닫힌(closed) 회로에서 $-R_2i_2+R_3i_3=E_3-E_2$을 얻는다.
이렇게 얻은 세 방정식

$$\begin{aligned} i_1+ \quad i_2+ \quad i_3 &= 0 \\ -R_1i_1+R_2i_2 \qquad &= E_2-E_1 \\ -R_2i_2+R_3i_3 &= E_3-E_2 \end{aligned}$$

을 행렬로 나타내면

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -R_1 & R_2 & 0 \\ 0 & -R_2 & R_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ E_2-E_1 \\ E_3-E_2 \end{bmatrix}$$

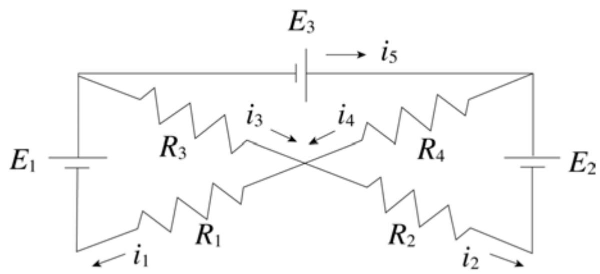
이 되고 간단한 계산을 하여

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -R_1 & R_2 & 0 \\ 0 & -R_2 & R_3 \end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3}\begin{bmatrix} R_2R_3 & -R_2-R_3 & -R_2 \\ R_1R_3 & R_3 & -R_1 \\ R_1R_2 & R_2 & R_1+R_2 \end{bmatrix}$$

을 얻는다. 따라서 예 6과 같은 방법으로 주어진 저항 R_i들과 전압

E_i 들로 각 경로의 전류 각각의 i_1, i_2, i_3를 표시할 수 있다.

문제 1 질량 m_1, m_2, m_3를 갖는 세 물체가 차례로 세 점 $(-1,\ 1)$, $(-1, -1)$, $(2, 1)$ 에 놓여 있다. 이 경우 무게 중심이 $(0, 0)$이고 각 질량의 합이 1 일 때, m_1, m_2, m_3를 구하기 위한 연립일차방정식을 구하여라.



Calculus Web

문제 2 아래 그림과 같은 전기회로에 Kirchhoff의 법칙을 적용하면 다음 방정식들을 얻는다.

$$
\begin{array}{rrrrrl}
i_1 & & -i_3 & & -i_5 & = 0 \\
 & i_2 & & -i_4 & +i_5 & = 0 \\
R_1 i_1 & & +R_3 i_3 & & & = E_1 \\
 & R_2 i_2 & & +R_4 i_4 & & = E_2 \\
 & & -R_3 i_3 & +R_4 i_4 & & = E_3
\end{array}
$$

여기에서 아래 행렬표현을 유도하여라.

$$
\begin{bmatrix} R_1 + R_3 & 0 & R_1 \\ 0 & R_2 + R_4 & -R_2 \\ -R_3 & R_4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_3 \\ i_4 \\ i_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix}
$$

[참고] 주소 http://matrix.skku.ac.kr/sglee/java/linear_eqn.html 의 도구를 이용하여 연립방정식을 풀어보세요! 계속하여 새로운 도구와 링크, 정리의 증명과 문제의 답에 대한 정보는 http://matrix.skku.ac.kr/calculus 에 추가된답니다.

[참고]: 예습으로 행렬 $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & -3 \end{bmatrix}$의 det와 $\mathrm{adj}(A)=C$를 아래와 같이 구했다. 다음 장에서는 연립방정식을 푸는 새로운 방법을 학습한다.

(II) 행렬식의 응용

행렬식의 응용

행렬식의 기원은 연립일차방정식 $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ 에서 $a_1b_2-b_1a_2\neq 0$이면 언제나 유일한 해가 존재한다는 것과 그 근이

$$x=\frac{c_1b_2-b_1c_2}{a_1b_2-b_1a_2},\quad y=\frac{a_1c_2-c_1a_2}{a_1b_2-b_1a_2}$$

이라는 것을 기억하기 위하여 생긴 것으로 볼 수 있다.

이러한 행렬식의 개념을 처음 발표한 것은 1683년 일본인 Seki Kowa이며 행렬식을 이용한 연립방정식의 해법을 처음으로 공포한 것은 1750년 Cramer이다.

행렬식의 어원 『determinant』는 가우스의 정수론에서 해의 존재성에 대한 **판별식의 의미**로 사용된 것에서 유래된 것이고, 현재의 의미로 사용되는 행렬식이란 말은 Cauchy(1789-1857)가 1815년에 처음으로 사용하였으며, 행렬의 이론은 행렬식보다 상당히 늦은 1845년 케일리(Cayley :1814-1897)에 의해 싹이 트기 시작하여 오늘날 행렬식의 기호 "| |"로 사용하기에 이르렀다.
[참고:http://matrix.skku.ac.kr/sglee/SampleLecture-3week/index.htm]

이제, 행렬식을 이용한 몇 가지 예를 살펴보자. 평면에서 서로 다른 두 점 (x_1, y_1), (x_2, y_2)를 지나는 직선의 방정식 $c_1x+c_2y+c_3=0$은 일차연립방정식 $\begin{cases} c_1x + c_2y + c_3=0 \\ c_1x_1+c_2y_1+c_3=0 \\ c_1x_2+c_2y_2+c_3=0 \end{cases}$을 만족한다.

【예 1】 서로 다른 두 점 (x_1, y_1), (x_2, y_2)을 지나는 직선의 방정식은 다음 식을 만족함을 보여라.

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}=0$$

풀 이 좌변에 $x=x_1$, $y=y_1$ 또 $x=x_2$, $y=y_2$을 대입하면 등식이 성립하고, 이 식의 여인자 전개식은 직선의 방정식인

$$x\begin{vmatrix} y_1 & 1 \\ y_2 & 1 \end{vmatrix}+y\begin{vmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \end{vmatrix}+1\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}=0$$

이 되므로 위 식은 주어진 두 점을 지나는 직선의 방정식이 된다.

《참고》 예1에서와 마찬가지로 서로 다른 세 점 (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3)를 지나는 평면의 방정식은 행렬식을 이용하여 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}=0$$

【예 2】 원점과 서로 다른 두 점 (x_1, y_1), (x_2, y_2)으로 만들어지는 삼각형의 면적은 $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$임을 이용하여, 서로 다른 세 점 (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)을 지나는 삼각형의 면적은 $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$임을 보여라.

풀 이 원점과 서로 다른 두 점 $(x_2-x_1,\ y_2-y_1)$, $(x_3-x_1,\ y_3-y_1)$을 지나는 삼각형의 면적은 주어진 조건에 의하여 $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}$이고 이 면적은 서로 다른 세 점 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$, $(x_3,\ y_3)$을 지나는 삼각형의 점 (x_1, y_1)을 원점으로 평행이동한 삼각형의 면적이며 이 값은 $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$ 를 가우스 소거법을 적용하여 세 번째 열을 $[1,\ 0,\ 0]^T$로 만든 후 여인자 전개를 한 것과 같다.

【예 3】 서로 다른 세 점 (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)을 지나는 이차 방정식 $ay+bx^2+cx+d=0$을 행렬식을 이용하여 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{vmatrix} y & x^2 & x & 1 \\ y_1 & {x_1}^2 & x_1 & 1 \\ y_2 & {x_2}^2 & x_2 & 1 \\ y_3 & {x_3}^2 & x_3 & 1 \end{vmatrix}=0$$

【예 4】 연습문제 (2-1)에서 구한 아래의 행렬식은 Vandermonde 행렬식이라고 한다.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ {x_1}^2 & {x_2}^2 & {x_3}^2 \end{vmatrix}=(x_3-x_2)(x_3-x_1)(x_2-x_1)$$

【예 5】 3개의 점을 지나는 2차식도 다음과 같은 행렬식을 이용하여 구할 수 있다. 서로 다른 세 점 (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)을 지나는 2차 방정식은 다음을 만족한다.

$$\begin{cases} y_1=c_1+c_2x_1+c_3x_1^2 \\ y_2=c_1+c_2x_2+c_3x_2^2 \\ y_3=c_1+c_2x_3+c_3x_3^2 \end{cases}$$

즉,

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & {x_2}^2 \\ 1 & x_2 & {x_2}^2 \\ 1 & x_3 & {x_3}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

이므로

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & {x_2}^2 \\ 1 & x_2 & {x_2}^2 \\ 1 & x_3 & {x_3}^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

이다.

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & {x_2}^2 \\ 1 & x_2 & {x_2}^2 \\ 1 & x_3 & {x_3}^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ {x_1}^2 & {x_2}^2 & {x_3}^2 \end{vmatrix} = (x_3 - x_2)(x_3 - x_1)(x_2 - x_1)$$

이므로 $x_i \neq x_j$ 이면 역행렬이 존재하여 위에서 구한 c_1, c_2, c_3을 가지고 주어진 세 점을 지나는 이차방정식 $y = c_1 + c_2 x + c_3 x^2$ 을 구할 수 있다. 이런 과정을 **Lagrange Interpolation** 이라 하고 위의 행렬식을 **Vandermonde** 행렬식이라고 한다. (위의 방법은 n개의 점을 지나는 $n-1$차의 다항식을 구하는데도 그대로 이용된다.)

【예 6】 5개의 점 (x_i, y_i), $i = 1,2,3,4,5$을 지나는 원추곡선(conic section) $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$은 다음 식을 만족한다.

$$\begin{vmatrix} x^2 & xy & y^2 & x & y & 1 \\ {x_1}^2 & x_1 y_1 & {y_1}^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ {x_2}^2 & x_2 y_2 & {y_2}^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ {x_3}^2 & x_3 y_3 & {y_3}^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ {x_4}^2 & x_4 y_4 & {y_4}^2 & x_4 & y_4 & 1 \\ {x_5}^2 & x_5 y_5 & {y_5}^2 & x_5 & y_5 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

성균관대 JAVA를 이용한 행렬의 계산

http://matrix.skku.ac.kr/newMatrixCal/Test.html

여러 시행과 보완을 거치며 독창적이고, 외국의 소프트웨어에 의존하지 않으며 궁극적으로 누구든지 언제 어디서나 사용이 가능한 아래의 SKKU-JAVA 도구를 개발하여 인터넷에 올려 놓게 되었습니다.

http://matrix.skku.ac.kr/newMatrixCal/Test.html

맺는말 :

이제 여러분은 선형대수학에서 배운 행렬과 행렬의 집합, 그 들 사이의 함수에 대한 지식을 사장시키지 않고 실제로 주위에서 만나는 문제를 행렬을 이용해 표현하고 위의 다양한 도구를 이용하여 실질적으로 답을 구 할 수 있는 계산 능력은 갖추었습니다.

읽을거리 : 행렬이론의 역사:
http://matrix.skku.ac.kr/sglee/SampleLecture-3week/index.htm 행렬의 이용(수학적모델링): http://matrix.skku.ac.kr/sglee/l_LAAppl/index.html

성균관대학교 이상구 교수