Sungkyunkwan University
Linear Algebra Lab.
성균관대학교 선형대수학 연구실

Prof. Sang-Gu Lee, sglee@yurim.skku.ac.kr

Generalized eigenvector 란 ?

(아래는 이상구 교수의 강의록을 정진조교를 일부 타이프시키며 공부시킨 내용으로 이상구교수가 직접 보강 수정한 것입니다. 2003년)

각 Jordan block J_k는 대각선 성분을 모두 같은 고유값 λ_i로 갖는 상삼각행렬 (upper triangular matrix)이고, 하나의 고유값 λ_i에 대응하는 Jordan block은 여러개 일 수도 있다. 특히, A가 n개의 일차독립인 고유벡터들을 갖는다면 n개의 1×1 Jordan block을 갖는 Jordan 표준형(즉, 대각선행렬)을 갖는다.

또한, 하나의 고유값 λ_i의 중복도가 m_i 이고 <이것을 λ_i의 **대수적 중복도**(algebraic multiplicity)라 한다>, 이에 대응하는 k_i 개 ($k_i \leqq m_i$)의 일차독립인 고유벡터들을 갖는다면, 이것을 λ_i에 대한 **기하적 중복도**(geometric multiplicity)라 한다. 참고로 이는 고유값 λ_i에 대한 고유공간의 차원과 같은 것이다. A는 λ_i를 대각선성분으로 갖는 k_i개의 Jordan block과 또 각각의 다른 고유값 λ_j들에 대응하는 Jordan block들도 갖게 된다. 그리고 각 λ_j에 대응하는 모든 Jordan block들의 크기의 합은 λ_j의 중복도인 m_j가 된다. 따라서, 각각의 고유값에 대한 대수적 중복도와 기하적 중복도가 모두 같은 행렬에 대한 Jordan 표준형은 대각선행렬이 된다.

우선 예를 하나 보도록하자.

【예제 1】

$$J_A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & & & & & \\ 0 & 2 & 1 & & & O & & \\ 0 & 0 & 2 & & & & & \\ & & & 2 & & & & \\ & & & & 3 & 1 & & \\ & & & & 0 & 3 & & \\ & O & & & & & 0 & 1 \\ & & & & & & 0 & 0 \end{bmatrix}_{8\times 8}$$

은 특성방정식으로 $\det(A-\lambda I)=(\lambda-2)^4(\lambda-3)^2\lambda^2$ 을 갖는 어떤 8차의 정사각행렬 A의 Jordan 표준형이다. 각 고유값의 중복도가 J_A 의 주대각선에 나타나는 고유값의 개수를 결정한다는 것을 주목하라. 대각선에 고유값 2는 4개, 3은 2개, 0은 1개있다. 즉 고유값의 중복도는 그 고유값에 대응하는 모든 Jordan block 들의 크기의 합을 나타낸다. ¶

어떤 행렬 A의 Jordan 표준형 J_A 는 $P^{-1}AP=J_A$ 가 되게 하는 가역행렬 P를 몰라도, 각 고유값의 중복도와 그 고유값에 대한 고유공간(eigenspace) 안에 있는 1차독립인 고유벡터들의 수 (즉, 고유공간의 차원)에 의하여 대부분은 바로 결정된다. 물론, 경우에 따라 $P^{-1}AP=J_A$되는 행렬 P를 구하는 것이 꼭 필요할 때도 있다.

이제, 예를 통하여 Jordan 표준형의 성질과 J_A, P 를 구하는 과정을 알아 보자.

【예제 2】 5차의 정사각행렬 A가 중복도 5 인 고유값 λ 하나만을 갖고 λ에 대응하는 일차독립인 고유벡터를 단 하나만 갖는다면 A의 Jordan 표준형은

$$J_A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

이다. 왜냐하면 A의 일차독립인 고유벡터는 하나밖에 없으므로 Jordan block이 단 하나이기 때문이다.

Generalized eigenvector 은 어디에서 유도 되나?

이제 행렬 A의 Jordan block의 성질을 분석해보자. $(J_A-\lambda I)$는 다음성질을 갖는 R^5 상의 선형변환이다.

$$(J_A - \lambda I)\ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

그런데, $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_5$가 R^5 의 표준기저일 때 $(J_A - \lambda I)\ \mathrm{e}_1 = 0$ 이고 $(J_A - \lambda I)\ \mathrm{e}_i = \mathrm{e}_{i-1}$, $i = 2,3,4,5$ 이므로 e_1 은 λ에 대응하는 J_A의 하나뿐인 일차독립인 고유벡터이다. $(J_A - \lambda I)^i\ \mathrm{e}_i = 0$ $(i = 2,3,4,5)$ 이고 이 식은 $(J_A - \lambda I)\ \mathbf{x} = 0$과 비슷한 꼴이므로 e_i $(i = 2,3,4,5)$가 J_A 의 고유벡터는 아니지만 고유벡터와 유사한 성질을 갖게 된다. 이런 e_i $(i = 2,3,4,5)$ 를 J_A 에 대한 **일반화된 고유벡터** (generalized eigenvector) 라고 한다.

일반적으로 $U^{*}AU$ 가 A 의 Jordan 표준형 J_A 가 되는 유니타리 행렬 U 를 구하는 문제를 "일반화된 고유벡터를 구하는 문제"라 하는데, 이것을 여기에서 다루어 보자.

Note : If $\{ \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \ldots, \overrightarrow{x_n} \}$이 L.T set이고 $A \in M_n$이 nonsingular 이면

$\Rightarrow \{ A\overrightarrow{x_1}, A\overrightarrow{x_2}, \ldots, A\overrightarrow{x_n} \}$ 도 L.T set.

문제: J가 A의 Jordan Canonical block 일 때 $Q^{-1}AQ = J$ 가 되게 하는 nonsingular Q를 찾는 방법 (이 행렬은 unique 하지는 않다.)

(Observation)

(1) If $Q^{-1}AQ = J \Rightarrow$ AQ=QJ 따라서,

만일 $q_i = Q^{(j)}$이면 $Aq_j = \lambda_j q_j + \delta_j\ q_{j-1}$

where $\delta_j = \begin{cases} 0 & \text{if } J\text{의 } jth \text{ col이 어떤 조르단 불록의 첫번째 col} \\ 1 & \text{if 아니면} \end{cases}$

(2) 따라서 $(A - \lambda_j I)q_j = \delta_j q_{j-1}$이고

다 $\delta_j = 0$이면 $Aq_j = \lambda_j q_j \Rightarrow q_j$는A의 $\overrightarrow{ev} \sim \lambda_j$

다 $\delta_j = 1$이면 $(A - \lambda_j I)q_j = q_{j-1}$

(3) # of L.I $\overrightarrow{ev}'s$ of A = # of Jordan blocks in J_A

[방법]

1. A의 각 $\overrightarrow{ev}'s$ 의 대수적 중복도(alg. mlty) 와 기하적 중복도(geo. mlty) , J_A 를 구하라.
2. 대응하는 $\overrightarrow{ev}'s$ 를 찾아라
3. 각 $\overrightarrow{ev}'s$의 geo.mlty에 대하여

   Solve $(A-\lambda I)g_j = g_{j-1}$ 하는 식으로 반복하여 $g_i's$ 를 구하라
4. 위의 과정 3을 반복하라.
5. 그런 후 Q를 만들어서 AQ=AJ를 확인하라.

2. A= $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ det(A- λI)=(1- λ)(2- λ)(1- λ)

$\Rightarrow \lambda_1$=2 , λ_2=1,1

$\overrightarrow{ev}$ $\overrightarrow{x_1}$ ~ $\lambda_1 \Rightarrow (A-2I)\overrightarrow{x_1}=0$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} y+z=0 \\ -x-y=0 \\ x-z=0 \end{array} \Rightarrow q_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\overrightarrow{ev}$ $\overrightarrow{x_2}$ ~ $\lambda_2 \Rightarrow (A-2I)\overrightarrow{x_2}=0$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} x+y+z=0 \\ -x=0 \\ x=0 \end{array} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Note : geo.mtly (1)=1 (∵x=0으로 fixed . y+z=0 으로 둘은 dependent)

따라서 한 개의 조른단 블록

즉, $J_A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Find q_3.

$$(A-\lambda I)g_3 = g_2 \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=0 \\ -x \quad\quad =1 \\ x \quad\quad =-1 \end{cases}$$

$\Rightarrow q_3 = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ 물론 (−1,1,0)으로 잡아도 된다.

Q의 col.들의 일차 독립성은 Friedberg의 책 Linear Algebra p419 Thm 7.1 등을 보면 자세히 나와 있다.

Let Q=[q_1, q_2, q_3]= $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

AQ= $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-1+1 & 1-1 & -2-1+2 \\ -1-1 & 1 & 1-1 \\ 1+1 & -1 & -1+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

QJ= $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

$$Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \blacksquare$$

Note. J_A의 모양을 바꾸려면 Q의 대응하는 col을 교환하면 된다.

(3) A= $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2, \lambda_4 = 2$

$$J_A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$q_1 : [A - \lambda_1 I \mid \vec{0}\ ] \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ -x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow q_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$q_2 : [A-\lambda_2 I]q_2 = q_1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & : & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & : & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & : & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & : & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & : & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & : & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & : & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & : & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ -x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow q_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$q_3 : [A-\lambda_3 I \mid \vec{0}\ ] \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & : & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & : & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & : & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & : & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & : & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & : & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & : & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & : & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ -x_1 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow q_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

geo. mlty(2)=1

$$q_4 : [A-\lambda_4 I]q_4 = q_3 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & : & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & : & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & : & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & : & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & : & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & : & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & : & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & : & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ -x_1 = 0 \\ x_3 + x_4 = 1 \end{cases} \Rightarrow q_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad AQ = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \quad QJ = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

AQ= QJ

(4) $$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 & : & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & : & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & : & 0 & 0 \\ & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & : & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & : & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad J = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & : & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & : & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & : & 0 & 0 \\ & & & & & \\ 0 & 0 & 4 & : & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & : & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$Q=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & : & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & : & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & : & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & : & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & : & -1 & 0 \end{bmatrix}$$ Block multiplication 이므로 (1)+(3) 에 의해 쉽게됨

$$AQ=\begin{bmatrix} -2 & 4 & 0 & : & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 3 & : & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -3 & : & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & : & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & : & -2 & -1 \end{bmatrix}=QJ=\begin{bmatrix} -2 & 4 & 0 & : & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 3 & : & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -3 & : & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & : & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & : & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

■

(5) $A=\begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & 2 \end{bmatrix}$

$$AQ=\begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{5}{11} & 0 \\ 3 & \frac{15}{11} & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 8 & 6 & -1 \\ 0 & \frac{20}{11} & 0 \\ 12 & \frac{93}{11} & 1 \end{bmatrix}$$

$$QJ=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{5}{11} & 0 \\ 3 & \frac{15}{11} & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 8 & 6 & -1 \\ 0 & \frac{20}{11} & 0 \\ 12 & \frac{93}{11} & 1 \end{bmatrix}$$

$\therefore AQ=QJ$

보듯이 JCF을 알면 대응 하는 transition 행렬 Q 는 쉽게 구할 수 있다.

이제 JFC를 구하는 방법만 알면 모든 것이 끝난다.

이제 조르단 표준형(JCF)을 구하는 방법을 학습하자.

행렬 $A\in M_n$ 가 k개의 서로 다른 고유값 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$를 갖는다고 할 때, A 의 Jordan 표준형 J_A는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$J_A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_k \end{pmatrix}$$

여기서 각 A_i 는 고유값 λ_i 에 대응하는 적당한 크기의 Jordan block들의 block대각선 행렬이다. 이것을 J_A의 **block 부분행렬**이라 한다. 이제 우리는 각각의 고유값 λ_i 에 대한

$$A_i = \begin{pmatrix} J_{i,p_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{i,p_2} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & J_{i,p_{li}} \end{pmatrix}$$

의 구조만 알면 J_A를 쉽게 구할 수 있게 된다. J_A를 구할 때 λ_i 를 감소(또는 증가)하는 값의 순서로 정하고 그 안의 Jordan block들에 block 크기 순으로 순서를 주면 J_A는 유일하게 결정된다.

이제 A_i를 쉽게 구하는 방법을 알아보자.

우선, 각 $\lambda_i(\, i=1,2,\cdots,k)$에 대하여 A_i안의 Jordan block의 개수 l_i $(\,1 \le i \le k)$ 와 각각의 $J_{i,t} \in M_{p_t}$의 크기 p_t를 구하자. λ_i에 대응하는 일차독립인 고유벡터를 $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2, \cdots,$ $\mathbf{x}_{l_i}$ 이라 하고, 부호를 단순히 하기 위하여 우선 하나의 고유값에 대하여만 생각하자. 따라서 이 λ_i를 λ, l_i를 l이라 하자. 그런데 A_i의 각 Jordan block의 개수 l과 그 각각의 block의 크기 $p_1, p_2, \cdots, p_l$들은 $A-\lambda_i I$ 의 어떤 거듭제곱의 계수(rank)를 앎으로서 결정된다. 일반성을 잃지 않고 $p_1 \ge p_2 \ge \cdots \ge p_l$이라 할 수 있다. 이제 고유값 λ과 그에 대한 고유공간의 차원(기하학적 중복도)인 l과 p_t를 이용하여 A_i를 쉽게 구할 수 있는 '점들의 배열'을 소개하도록 하겠다. 이를 **점 도표(dot diagram)**라 부른다. 점 도표는 아래와 같은 규칙으로 정해진다.

1. 점 도표는 l 개의 열에 의하여 이루어 진다. (즉, l 개의 Jordan block)
2. l개의 숫자 $p_1, p_2, \cdots, p_l$ 을 크기 순으로 하여 왼쪽에서 오른쪽으로 배열하여

아래와 같이 도표를 만들자, 그러면 이 도표의 j 번째 열의 점들은 k_j개로 이루어진다. 만일 $\mathbf{x}_j$ 가 j번째 열의 맨 아래의 점이면, 그 맨 위는

$(A-\lambda I)^{k_j-1}(\mathbf{x}_j)$ 에 대응하는 점이 된다. 그 열의 위에서 두 번째의 점은 $(A-\lambda I)^{k_j-2}(\mathbf{x}_j)$ 에 대응한다.

따라서 A_i 에 대응하는 점 도표는 아래와 같다.

$$
\begin{array}{lllll}
\bullet\,(A-\lambda I)^{k_1-1}(\mathbf{x}_1) & \bullet\,(A-\lambda I)^{k_2-1}(\mathbf{x}_2) & \cdots & \bullet\,(A-\lambda I)^{k_{p_l}-1}(\mathbf{x}_{p_l}) \\
\bullet\,(A-\lambda I)^{k_1-2}(\mathbf{x}_1) & \bullet\,(A-\lambda I)^{k_2-2}(\mathbf{x}_2) & \cdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & & \bullet\ \mathbf{x}_{p_l} \\
\bullet\,(A-\lambda I)(\mathbf{x}_1) & \bullet\ \mathbf{x}_2 & & \\
\bullet\ \mathbf{x}_1 & & &
\end{array}
$$

여기서, $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2, \cdots$, $\mathbf{x}_{p_l}$ 는 λ_i 에 대응하는 일차 독립인 고유벡터들이다. 만일 r_j 를 점 도표에서 j 번째 열의 점의 개수라 하면, r_1 은 1×1 이상의 크기의 Jordan block 의 수이고, r_2 는 2×2 이상의 크기의 Jordan block 의 수이며, r_{p_l} 은 $p_l \times p_l$ 이상의 크기의 Jordan block 의 수이다. 따라서, $r_1 \ge r_2 \ge \cdots \ge r_{p_1}$ 임을 알수 있다. 이 증명은 조합이론(combinatorics)을 이용해야 하므로 여기서는 생략하고, 예를 통하여 이를 확인해 보도록 한다.

【예제 3】 9×9 행렬 A_i 는 그 안의 Jordan block의 개수인 수 l 과 각 Jordan block의 크기인 $p_1, p_2, \cdots, p_l$ 에 의하여 완전하게 결정된다는 것을 보이기 위하여 $l=4$ 라 하고 $p_1=3, p_2=3, p_3=2, p_4=1$ 이라 하자. 그러면 block의 크기 순서에 따라

$$
A_i = \begin{pmatrix}
\lambda_i & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \lambda_i & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \lambda_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \lambda_i & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_i & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_i & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_i & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_i & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_i
\end{pmatrix}_{9\times9}
$$

로 유일하게 결정된다. 이것의 점 도표를 구하면 $l=4$, $p_1=3$, $p_2=3$, $p_3=2$ 이고 $p_4=1$이므로 λ_i에 대한 점 도표는 아래와 같다.

•　•　•　•
•　•　•
•　•

¶

정리 7.10 λ_i에 대한 점 도표의 처음 r개 행안의 점의 수는 $(A-\lambda_i I)^r \mathbf{x} = 0$의 해공간의 차원(즉, $(A-\lambda_i I)^r$ 의 nullity)과 같다.

정리 7.11 행렬 $A \in M_n(\mathbb{C})$ 대하여, r_j를 λ_i에 대한 점 도표의 j번째 행에 있는 점의 개수라 하면

(1) $r_1 = n - \operatorname{rank}(A-\lambda_i I)$

(2) 만일 $j > 1$ 이면, $r_j = \operatorname{rank}((A-\lambda_i I)^{j-1}) - \operatorname{rank}((A-\lambda_i I)^j)$

증 명 정리 7.9 에 의하여,

$$\begin{aligned} r_1 + r_2 + \cdots + r_j &= \operatorname{nullity}((A-\lambda_i I)^j) \\ &= n - \operatorname{rank}((A-\lambda_i I)^j), (j \geq 1) \end{aligned}$$

그리고, $r_1 = n - \operatorname{rank}((A-\lambda_i I)^1)$이고

$$\begin{aligned} r_j &= (r_1 + r_2 + \cdots + r_j) - (r_1 + r_2 + \cdots + r_{j-1}) \\ &= [n - \operatorname{rank}((A-\lambda_i I)^j)] - [n - \operatorname{rank}((A-\lambda_i I)^{j-1})] \\ &= \operatorname{rank}((A-\lambda_i I)^{j-1}) - \operatorname{rank}((A-\lambda_i I)^j), \ j > 1. \end{aligned}$$

□

이 정리는 λ_i 에 대한 점 도표는 A 에 의하여 완전히 결정됨을 보여준다.

실제로 크기가 10차인 행렬의 Jordan표준형을 구하기 위한 점도표를 그릴 때, 우리는 10 × 10 행렬의 수 많은 거듭제곱과 계수를 구하여야 한다. Gauss 소거법등의 이런 계산 과정은 HLINPRAC이나 MATHEMATICA 또는 MATLAB 등의 기존의 수학 무름모(software)를 이용하는 것이 효과적이다. (참고 http://www.mathworks.com)

【예제 4】 다음 행렬 A의 Jordan 표준형을 구하라.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

풀 이 행렬 A의 특성방정식은 $\det(A-\lambda I)=(\lambda-3)(\lambda-2)^3$ 이므로 A는 두 개의 서로 다른 고유값 λ_1과 λ_2를 갖는다. 여기서 $\lambda_1=3$은 중복도가 1이고 $\lambda_2=2$는 중복도가 3 이다. 따라서 λ_1 에 대응하는 점 도표는 1개의 점을 갖고 그에 대한 점도표는

$$\bullet$$

이므로, A_1은 1×1 Jordan block 1 개. 즉, $A_1=[3]$이다.

또, λ_2에 대응하는 점 도표는 3개의 점을 갖는다. 그리고

$$r_1=4-\operatorname{rank}(A-2I)=4-\operatorname{rank}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}=4-2=2$$

이고

$$r_2=\operatorname{rank}(A-2I)-\operatorname{rank}[(A-2I)^2]=2-1=1$$

이다 (실지로는 $3=r_2+r_1=(2)+1$ 이므로 r_2는 바로 나온다). 따라서 λ_2 에 대한 점도표는

$r_1 = 2$: • •

$r_2 = 1$: •

이다. 따라서, A_2 은 2×2 Jordan block이 1개이고 1×1 Jordan block이 1개이다. 즉,

$$A_2=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

그러므로 행렬 A의 Jordan표준형은 다음과 같다.

$$J_A=\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$ ¶

【예제 5】 다음 행렬 A 의 Jordan 표준형을 구하라.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 1 & 3 \\ -2 & -2 & 3 & 3 \\ -2 & -6 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

풀 이 A 의 특성방정식은 $\det(A-\lambda I) = (\lambda-2)^2(\lambda-4)^2$ 이고, 따라서 A 의 두 개의 서로 다른 고유값은 각각 중복도가 2인 $\lambda_1 = 4$와 $\lambda_2 = 2$이다. $\lambda_1 = 4$에 대하여 $r_1 = 4 - \operatorname{rank}(A-4I) = 4-3 = 1$ 이므로(즉, 1개의 Jordan block), r_2는 1이다 ($\therefore$ 점의 수가 2=1+(1)). 따라서 λ_1에 대한 점 도표는

$$\begin{matrix} \bullet \\ \bullet \end{matrix}$$

이다. 즉,

$$A_1 = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$\lambda_2 = 2$에 대하여 $r_1 = 4 - \operatorname{rank}(A-2I) = 4-2 = 2$ 이므로(즉, 두개의 Jordan block), r_2는 0이다($\because$ 점의 갯수 $2 = 2 + (0)$이므로). 즉, λ_2에 대한 점 도표는

$$\begin{matrix} \bullet & \bullet \end{matrix}$$

이므로

$$A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

그러므로 A 의 Jordan 표준형은

$$J_A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

이다.

(문제) 모든 정사각행렬 $A \in M_n(C)$는 자신의 전치행렬과 닮음 (similar) 임을 보여라.

(힌트) $\begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} J_t \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = J_t^{\,T}$ 을 이용하여 Jordan block $J_t = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in M_k$ 이 J_t^T 와 닮음 (similar) 임을 보이면 바로

따라 나온다.

(문제) 점 도표를 이용하여 다음 행렬의 Jordan 표준형을 구하라.

1. $\begin{bmatrix} i & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ 답 : $\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ 답 $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ 답 : $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Polynomials 와 matrices ; the minimal poly.

최소다항식(minimal polynomial)

잘 알려진 Cayley – Hamilton **정리**란 다음과 같다.

「모든 행렬 $A \in M_n$는 자신의 특성방정식 $p_A(t) = 0$을 만족한다. 즉 $p_A(A) = O_n$」

이런 다항식을 A의 annilhilating **다항식**이라 하는데. 이런 다항식 중 흥미있는 하나를 소개한다.

정의 (minimal 다항식)

행렬 $A \in M_n$에 대하여 $q_A(A) = 0$ 되게 하는 양의 최소 차수의 모닉(monic) 다항식을 A에 대한 **최소 다항식**(minimal polynomial) 이라고 한다.

즉, A는 체 K 상의 n차의 정사각행렬이라 하자. f(A)=0을 만족하는 0 아닌 다항식 f(t)가

존재한다. 그 예로는 A의 특성다항식이 있다. 이 다항식들 가운데 차수가 가장 낮은 것을 생각하고 그들로부터 최고차의 계수가 1인, 즉 모닉인 것을 택한다. 이러한 다항식 m(t)는 존재하고 유일하다. 그것을 A의 최소다항식 (minimal polynomial) 이라고 부른다

이것을 구하는 방법은 $A \in M_n$의 서로 다른 고유값이 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ 이고 특성방정식이 $p_A(t) = (t-\lambda_1)^1 (t-\lambda_2)^2 \cdots (t-\lambda_k)^{n_k}$ 라 하면

$$q_A(t) = (t-\lambda_1)^{m_1}(t-\lambda_2)^{m_2}\cdots(t-\lambda_k)^{m_k}$$

이다. 이때 m_i는 λ_i에 대응하는 Jordan block 중 크기가 가장 큰 block 의 크기이다. 따라서 A의 Jordan 표준형을 알면 A의 최소다항식도 구할 수 있다.

【예제 】 **아래** 행렬 A의 최소다항식을 구하라.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 1 & 3 \\ -2 & -2 & 3 & 3 \\ -2 & -6 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

풀 이

$$J_A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

이므로

특성 다항식은 $P_A(t) = (t-4)^2(t-2)^2$ 이고

최소 다항식은 $q_A(t) = (t-4)^2(t-2)$ 이다. ¶

정리. 7.12 n차의 정사각행렬 A가 k개의 서로 다른 고유값 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$를 가질 때 A가 대각화가능일 필요충분조건은 A의 최소다항식 $q_A(t)$가 $(t-\lambda_1)(t-\lambda_2)\cdots(t-\lambda_k)$ 인 것이다.

위의 정리는 대각화 가능한 행렬에 대한 또 하나의 준거가 된다.

THM

Let A∈ M_n and q_A(x)가 q_A(A)= 0_n 되는 the minimal poly. 이라면 A를 annihilate 하는 모든 다른 다항식 $p(x)$에 대하여

$$q_A(x) \mid p(x) \text{ 이다.}$$

(Pf) 우선 char. poly p_A(x)는 p_A(A)=0 이므로 그런 q_A(x)의 존재는 보장된다.

더구나 deg[q_A(x)]=m≤n 이므로

Division Algorithm 에 의해

$$p(x)= q_A(x)h(x)+r(x) \quad \text{where degree}[r(x)] < \deg[q_A(x)]$$

그러나 (가환환에서) p(A)= q_A(A)h(A)+r(A).

(∵다항식의 모든 계수는 C에 있으므로)

⇒ 0 = r(A)

⇒ r(x)=0 (∵ otherwise deg q_A(x)의 minimality 에 모순)

∴ q_A(x) | p(x) ■

예제) 행렬 A= $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ 의 최소다항식을 구하여라.

Sol) A의 특성다항식은 $\triangle t=|tI-A|=(t-2)^2(t-5)$. 위의 정리에 의해 (t-2)와 (t-5)는 m(t)의 인수이어야 한다. 그러나 m(t)는 $\triangle t$ 를 나눠야 하므로 m(t)는 다음 세가지 중 하나이다.

$m_1(t)=(t-2)(t-5)$

$m_2(t)=(t-2)^2(t-5)$

$m_3(t)=(t-2)^3(t-5)$

Cayley-Hamilton 정리로부터 $m_3(A)=\triangle(A)=0$ 인 것을 알 수 있고 $m_1(A)\neq 0$ 그러나 $m_2(A)=0$ 이라는 것을 밝힐 수 있다. 따라서 $m_2(t)=(t-2)^2(t-5)$ 는 A의 최소다항식이다.

Cor Similar matrices 는 같은 minimal poly. 갖는다.

(Pf) A ~B

⇒ ∃nonsingular S s.t $S^{-1}AS$=B and A= SBS^{-1}

$q_A(B)= q_A(S^{-1}AS) = S^{-1}q_A(A)S=0 \quad \Rightarrow \quad q_B(t) \mid q_A(t)$

q_B(A)= $q_B(SBS^{-1})$= $Sq_B(B)\,S^{-1}$=0 $\Rightarrow$ q_A(t) | q_B(t)

$\Rightarrow \exists$ unit a$\in C$ s.t q_A(t)= $\alpha\, q_B$(t)

그러나 q_A(t), q_B(t) 는 둘다 monic이고 $\alpha \in C$ 이므로 α=1

$\Rightarrow$ q_A(t) = q_B(t) ■

Coro A$\in M_n$ 이고 q_A(x) 가 A의 minimal poly 이면

$q_A(\lambda)$=0 $\Leftrightarrow \lambda \in \sigma(A)$ = The spectrum of A = The set of eigenvalues of A

(Pf) ($\Rightarrow$) q_A(t) | $p_A(t)$ 이므로 $p_A(\lambda)$ =0 $\Rightarrow \lambda \in \sigma(A)$

($\Leftarrow$) $\exists$ $x \neq 0$ s.t Ax= λx $\Rightarrow$ 0= q_A(A)x= $q_A(\lambda)$x $\Rightarrow q_A(\lambda)$=0 ■

Lemma 1. 한 Jordan block, say $J_m(\lambda)$, 의 char. poly. 와 minimal poly.은 같다.
더구나 만일 그 size 가 mxm 이면

$p_J(t)=q_J(t)=(t-\lambda)^m$이다.

($\because$ $[\lambda I - J_m(\lambda)]^m=0$ 이고 $[\lambda I - J_m(\lambda)]^{m-1}\neq 0$이므로$(t-\lambda)^m$이 minimal)

Note : 위의 Lemma는 $(t-\lambda)^m$ 의 companion matrix 와 hyper companion matrix 는 similar 하다는 것을 imply한다.

Lemma 2. If J= $\sum_{i=0}^{k} \oplus J_i(\lambda) \in M_n$ and $J_i(\lambda) \in M_{n_i}$ 이면 $(t-\lambda)^m$
where m=max { $m_1, m_2, \ldots, m_k$ } 가 minimal poly. $q_J(t)$ 이다

($\because$ $(J-\lambda I)^m=0$ 이고 $(J-\lambda I)^r \neq 0$ $\forall$ $r < m$ 이므로

($\because$If $m_k = m$ 이면 , $[J_{m_k}(\lambda)-\lambda I]^r \neq 0$ $\forall r < m$)

위의 Lemma에 의하여

Thm. Let $\sigma(A)=\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m\}$.

$q_A(t)=\Pi(t-\lambda_i)^{r_i}$

where r_i = the largest Jordan block $\sim\lambda_i$ 의 size

(:= λ_i 의 index)

(Pf) q_A(t)는 $J_A = J_1 \oplus J_2 \oplus \ldots \oplus J_m$ 일 때

$q_A(A) = q_A(J_A) = (J_A - \lambda_1 I)^{r_1}(J_A - \lambda_2 I)^{r_2}\cdots(J_A - \lambda_m I)^{r_m} = 0\cdots 0 = 0$

인 minimal degree 의 monic poly 이므로. ■

Thm $\sigma(A) = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_m\}$ $\lambda_i \neq \lambda_j$

A가 $d.ble$ (대각화 가능) $\Leftrightarrow$ $q_A(x) = (x-\lambda_1)\cdots(x-\lambda_m)$

$\Leftrightarrow$ $q_A(x)$=0의 모든 근의 대수적 중복도 가 1

즉, linear factors

(Pf) largest Jordan 의 size 가 1x1 이므로 clearly . OK.

Def . 다항식 $p(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + a_{n-2}t^{n-2} + \cdots + a_1 t + a_0$ 의

"companion matrix" 은

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & -a_0 \\ 1 & 0 & & \cdots \\ 0 & 1 & & \ddots \\ \vdots & 0\cdots & 1 & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & & -a_{n-1} \end{bmatrix} \in M_n \text{ 로 정의된다.}$$

Thm. 3.3.14

모든 monic poly. 은 그의 companion matrix 의 minimal poly 이면서 동시에 char. poly 이다.

Thm. 3.3.15

A $\in M_n$ 이 그의 char. poly $p_A(t) = 0$ 의 companion matrix와 similar 하다

$\Leftrightarrow$ $p_A(t) = q_A(t)$

Remark. 이제 어떻게 minimal poly.을 구하는가 또 왜 이것을 공부하는가에 대하여 생각해보자.

<u>minimal poly.을 공부하는 motivation</u>

1. 작은 size 의 경우 J.C.F 찾는데 도움
2. 함수의 matrix 값을 구할 때 이용하는데 유용
3. companion matrix 와의 관계는 Frobenius Normal Form 등의 연구에 이용
   (즉, A ≅ $\sum_{i=1} \oplus C_i$ where C_i가 각 $\lambda I - A$의 elementary divisor의 companion matrix)

Note. 사실 J.C.F를 알면 the minimal poly는 바로 구해진다.

(문제) 행렬 $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$의 최소 다항식을 구하라.

답 : 최소다항식, $q_A(\lambda) = (\lambda-3)(\lambda-2)$

예) $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1}$ 일 때

minimal poly를 이용하여 e^A 를 구하여라.

Sol) $q_A(t)$=(t-5)(t+2) = $p_A(t)$: 2차식

r(t)= $\alpha + \beta t$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} e^5 = \alpha + \beta 5 \\ e^{-2} = \alpha + \beta(-2) \end{cases}$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} \alpha = \frac{1}{7}(e^5 + 5e^{-2}) \\ \beta = \frac{1}{7}(e^5 - e^{-2}) \end{cases}$

일차식 생각 (∵2차식의 나머지만 생각하면 됨)

$\Rightarrow$ $e^A = r(A) = \alpha I + \beta A$

예) A= $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 0 \\ -6 & -2 & -3 & -2 \\ -3 & -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$ 의 minimal poly.를 구하여 $\sin\pi A$를 구하라.

Sol) $q_A(t)$ = $t^n - at^{n-1} - bt^{n-2} - \cdots$ for some a, b $\cdots$

Try

(1) degree1: $q_A(t)$=0 =$A - aI$?

(No. $A \neq aI$)

(2) degree2: $q_A(t)$=0 = $A^2 - aA - bI$ $\Rightarrow A^2 = aA + bI$?

(No. $\because$ a_{11}: -1= 2a + b , a_{22} : 2= 2a + b 모순)

(3) degree3: $q_A(t)$=0 = $A^3 - aA^2 - bA - cI$

$\Rightarrow A^3 = aA^2 + bA + cI$

(Yes. 확인 a=0, b=1, c=0)

minimal poly. 구하는 한 방법

$\Rightarrow q_A(t)$= $t^3 - 0t^2 - 1t + 0 = t^3 - t = t(t^2-1) = t(t-1)(t+1)$: 3차식 ■

이제 [Find $\sin\pi A$]

r(t)= $\alpha I + \beta t + \gamma t^2$ $\Rightarrow \begin{cases} r(0) = \sin 0 = 0 = \alpha \\ r(1) = \sin\pi = 0 = \alpha + \beta + \gamma \\ r(-1) = \sin(-\pi) = 0 = \alpha - \beta + \gamma \end{cases}$ $\Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$

r(t)= $\sin\pi t$

$\Rightarrow$ $\sin\pi A$=r(A) =0I+0A+0 A^2=0 ■

(예) . A= $\begin{bmatrix} -2 & 2 & -2 & 4 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ 에 대한 $\cos\Pi A$ 를 찾아라.

Sol) $q_A(t) = (t-2)(t-1)^2$

$r(t) = \alpha + \beta t + \gamma t^2$

γ(2)=1

$\Rightarrow \quad \begin{cases} \gamma(1)=-1 \\ \gamma'(1)=0 \end{cases} \quad \Rightarrow \alpha=1, \quad \beta=-4 \quad \gamma=2$

$\gamma(A)= \cos \pi A = \alpha I + \beta A + \gamma A^2$

$= I - 4I + 2A^2$ ■

Note. $A=\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1}$ 일때

e^A 를 (Jacobi's Identity를 이용하여) 구하라

sol) $S^{-1}e^A S = e^{S'AS} = e^{\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} e^5 & 0 \\ 0 & e^{-2} \end{bmatrix}$

$\Rightarrow e^A = S\begin{bmatrix} e^5 & 0 \\ 0 & e^{-2} \end{bmatrix}S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^5 & 0 \\ 0 & e^{-2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1}$ ■

Remark. J.C.F 알면 minimal poly 보다 더욱 유용하다.

Remark. 지금까지는 A $\in M_n(C)$ 에 대해 공부해온 셈이다. 앞의 결과들이 C 에서 나아가 더 일반적인 field에서도 거의 무리없이 전개된다는 것은 쉽게 알 수 있다. 특별한 경우에도 algebraically closed field 정도가 요구되었을 것이다. 이제 보다 더 나아가 더욱 일반적인 수학적 구조체에서 얘기할 수 있을 것이다. 보통 Marcus는 Euclidean Ring에서 이론을 전개했다. 특히 matrix canonical form에서는 (우리는 Integral Domain에서 이론을 전개할 수 있다.) 다음 determinental divisor, invariant factor, elementary divisor 로 이어지는 이론은 minimal poly을 구하는 alternative way 가 되면 궁극적으로는 matrix의 canonical form을 구하는 classical way 로 많은 output을 주어왔다.

주요정리로는

① Frobenius(or rational) canonical Thm. (Thm.3.4.7)

If A $\in M_n(C)$, A $\sim$ the direct sum of the companion matrices of the elementary divisor of $\lambda I_n - A$

② Jordan Normal Form Thm(2nd natural normal Form Thm)

If A $\in M_n(C)$,

(1) $\lambda I_n - A$ 의 elementary divisors 는 $(\lambda - a)^k, (k>0)$의 모양이고

(2)A $\sim$ the direct sum of the hyper companion matrices of all the elementary divisors of $\lambda I_n - A$.

(보통 elementary divisors와 관계된 canonical form을 "rational canonical form" 이라고 부른다.)

③ 1st natural Normal Form Thm

$A \sim \sum_{i=1}^{n} c_i$ *where* c_i 가 $\lambda I - A$ 의 각 invarient factors 의 companion matrix

④ 그리고 위의 정리들은 모두 Really nice Thm. (RNT) 에 근거하고 있다.

$A \sim B$ iff $\lambda I - A \sim \lambda I - B$

iff $\lambda - A$ 와 $\lambda I - B$가 같은 elementary divisor,

같은 invarient factors,

같은 determinantal divisor 를 갖는다.

그 외에 Smith Normal Form Thm 등이 있다.

Def. $p(\lambda) = (\lambda - a)^m$일때

$$H(p(\lambda)) = \begin{bmatrix} a & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & a & 1\cdots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & & a \end{bmatrix}_{m \times n} \quad : p(\lambda)\text{의 Hyper Companion matrix}$$

◦ 이상구교수의 읽고 보는 수학 자료실 (http://matrix.skku.ac.kr/sglee/)