(이상구 교수의 선형대수학 Sanple Exam)

I. 다음 명제의 참(T),거짓(F)을 구별하시오.

(1) 행렬 A가 가역이고 상삼각행렬이면 A^{-1}도 상삼각행렬이다. (T)

=> $A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{vmatrix}$ 가 상삼각행렬이면 $|A|=a_{11}a_{22}a_{33}\cdots\cdots a_{nn}$ 이고

$A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}\,aaj(A)$ 일 때, $|A|$는 스칼라이므로 $aaj(A)=[\,|C_{ji}|\,]$가 상삼각행렬임을 보이면 된다.

(단, $|C_{ji}|$ 는 행렬 A에서 j행 i열을 제외하고 남은 행렬로 이루어진 $(n-1)$차 행렬의 행렬식의 값의 $(-1)^{j+i}$ 곱을 한 수이다.)

$|C_{1i}|=0 \quad (i=2,3,4\cdots\cdots,n)$

$|C_{2i}|=0 \quad (i=3,4,5\cdots\cdots,n)$

$|C_{ji}|=0 \quad (j<i\leq n)$

그러므로 $aaj(A)$ 는 역시 상삼각행렬이다. ■

(2) 정사각행렬 A의 모든 성분이 정수이고, $det(A)=1$이면 A^{-1}의 모든 성분도 정수이다. (T)

=> $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}\,aaj(A)$ 이고 $A^{-1}=[\,b_{ij}]$ $aaj(A)=[\,C_{ij}]$ 라고 하면

$b_{ij}=\dfrac{C_{ij}}{|A|}=C_{ij}$ 이고 C_{ij}의 성분은 정수이므로 A^{-1}의 모든 성분은 정수가 된다. ■

(3) $det(A)=0$ 이면 $det(aaj(A))=0$ 이다. (T)

(4) If $A^2=A$ then $|A|=0$ or 1 . (T)

=> i) A 가 가역일 때,

$(A^{-1}A)A=A^{-1}A$

$I_nA=I_n$

$A=I_n$

$\therefore\ |A|=1$

ii) A가 비가역일 때,

$|A|=0$ ■

(5) 만일 $A^T=A^{-1}$ 이면 $det(A)=1$ 이다. (T)

=> $|A^T|=|A|$ 이므로

=> $|A|=|A^T|=|A^{-1}|$

=> $|A|=\left|\frac{1}{A}\right|$

=> $|A|=\frac{1}{|A|}$

=> $|A||A|=1$

=> $|A|=1 \text{ or } 0$

$det(A)=|A|=1$ ($\because A$ 는 가역이므로) ■

(6) $\{\mathbf{x_1},\ \mathbf{x_2},\ \mathbf{x_3}\}$가 일차독립이면 $\{\mathbf{x_1}+\mathbf{x_3},\ \mathbf{x_2}-\mathbf{x_3},\ \mathbf{x_1}+\mathbf{x_2}\}$도 일차독립이다.(T)

=> $\{\mathbf{x_1},\ \mathbf{x_2},\ \mathbf{x_3}\}$ 가 독립이면

$c_1\mathbf{x_1}+c_2\mathbf{x_2}+c_3\mathbf{x_3}=0$ 일 때 $c_1=c_2=c_3=0$. $(c_1, c_2, c_3 \in R)$ 이다.

$\{\mathbf{x_1}+\mathbf{x_3},\ \mathbf{x_2}-\mathbf{x_3},\ \mathbf{x_1}+\mathbf{x_2}\}$가 독립임을 보이자.

$a_1(\mathbf{x_1}+\mathbf{x_3})+a_2(\mathbf{x_2}-\mathbf{x_3})+a_3(\mathbf{x_1}+\mathbf{x_2})=0$ 일 때,

$a_1=a_2=a_3=0$, $(a_1, a_2, a_3 \in R)$)

(증명) $(a_1+a_3)\mathbf{x_1}+(a_2+a_3)\mathbf{x_2}+(a_1-a_2)\mathbf{x_3}=0$

=> $a_1-a_3=a_2+a_3=a_1-a_2=0$ $(a_1-a_3,\ a_2+a_3,\ a_1-a_2 \in R)$

=> $a_1=a_2=a_3=0$

$\therefore \{\mathbf{x_1}+\mathbf{x_3},\ \mathbf{x_2}-\mathbf{x_3},\ \mathbf{x_1}+\mathbf{x_2}\}$는 일차독립이다. ■

(7) 공집합은 일차종속이다. (T)

=>만일 공집합 ϕ가 1차 독립이면 L.I.인 nonzero vector가 ϕ 안에 존재해야한다.

그러나 이런 nonzero vector가 ϕ 안에 존재하지 않으므로 1차 독립이 될 수 없다.

(8) 일차종속인 집합의 부분집합은 일차종속이다. (F)

=> 일차종속인 집합안의 원소(nonzero vector)가 하나인 부분집합은 항상 일차독립이다.

II. Define 또는 Find.

(1) (정의) $A \in M_n(R)$의 Laplace 여인자 (cofactor) 전개:

$$det(A)=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \quad \text{where} \quad i=1,2,3,4,\cdots\cdots,n$$

여기서 $A_{ij}=(-1)^{i+j}detA(i|j)$, $A(i|j)=A$에서 ith row와 jth col.을 delete한

(n-1)×(n-1) 행렬.

(2) 벡터공간의 정의를 정확히 기술하시오.

=>임의의 집합 $V(\neq\phi)$ 에서 두 연산, 벡터덧셈(vector addition)과 스칼라 배가 정의 되어

있고, 임의의 $x, y, z\in V$ 와 $h, k\in R$ 에 대하여 그 정의 아래서 두 개의 기본법칙

$A.\quad x, y\in V \quad\rightarrow\quad x+y\in V$

$SM.\quad x\in V \ ,k\in R \quad\rightarrow\quad kx \in V$

과, 다음의 8개의 연산법칙이 성립할 때, 집합 V를 주어진 연산에 관한 R 상의 벡터 공간(vector space)이라 하고 벡터공간 V의 원소를 벡터라고 한다.

$A1.\quad x+y=y+x$

$A2.\quad (x+y)+z=x+(y+z)$

$A3.$ 모든 $x\in V$ 에 대하여 다음을 만족하는 원소(벡터) 0 이 단 하나 존재한다.

$$x+0=0+x=x$$

$A4.$ V의 각 원소 x 에 대하여, 다음을 만족하는 $-x$가 V에 유일하게 존재한다.

$$x+(-x)=(-x)+x=0$$

$SM1.\quad k(x+y)=kx+ky$

$SM2.\quad (h+k)x=hx+kx$

$SM3.\quad (hk)x=h(kx)=k(hx)$

$SM4.\quad 1x=x$

(3) 벡터공간의 기저(basis)를 정의하시오.

집합 V 가 벡터공간일 때 일차독립인 V의 부분집합 B 가 V 를 생성할 때, B 를 V 의 기저(basis)라고 한다.

(4) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}^{1998}$ 을 구할 때 HLINPRAC을 이용하는 순서를 자세히 서술하시오.

1. 행렬을 만들려면, 먼저 M을 누르면 화면에 알파벳과 그 알파벳이 해주는 역할이 하단에 나와있다(예:I를 누르면, 역행렬을 구할수 있다)
2. 다음 N을 누르면 행렬을 만들 수 있으며 만들 행렬의 이름을 지정해준다 (예:a)
3. 행과 열의 수를 지정해 준다 (2행 2열므로, 2와2)
4. 원소를 지정해준다(2, 3, 4, -4)
5. 거듭제곱으로 고칠수 있는 알파벳기호 p를 눌러주고 1998을 지정해준다.
6. (파일저장) 만든 행렬을 디스켓이나 하드에 저장하려면, W를 누른다.
   만일 만든 행렬의 이름이 "a" 이었고, 하드에 이름을 u.mat로 저장하려면,
   c:\u.mat 와 같이 타자한다.
7. (파일불러오기)저장한 파일을 불러오려면, R을 타자하고 하드에 있는 파일의 이름을

타자한다.예를 들어 c:\a.mat 를 타자하고 저장할 이름을 다시 지정해준다.a.mat ■

(5) Cramer공식을 이용하여 다음 연립방정식을 풀어라.

$$\begin{cases} -2x_1+3x_2-x_3= & 1 \\ \quad x_1+2x_2-x_3= & 4 \\ -2x_1 \; -x_2+x_3= & -3 \end{cases}$$

풀이)

계수행렬을 A라하면,

$$|A|=\begin{vmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix}=(-2)(2)(1)+(3)(-1)(-2)+(-1)(-1)(1)-(-1)(2)(-2)-(3)(1)(1)$$

$$-(-2)(1)(1)=-2$$

$$|M_1|=\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \end{vmatrix}=(1)(2)(1)+(3)(-1)(-3)+(-1)(4)(1)-(-1)(2)(-3)-(3)(4)(1)$$

$$-(1)(-1)(-1)=-4$$

$$|M_2|=\begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \\ -2 & -3 & 1 \end{vmatrix}=-6$$ (위의 방식과 같이 풀면)

$$|M_3|=\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ -2 & -1 & -3 \end{vmatrix}=-8$$

$$x_1=\frac{|M_1|}{|A|}=\frac{-4}{-2}=2$$

$$x_2=\frac{|M_2|}{|A|}=\frac{-6}{-2}=3$$

$$x_3=\frac{|M_3|}{|A|}=\frac{-8}{-2}=4$$ ■

(1) n차의 정사각행렬 A가 가역일 때, 다음을 보여라.

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\,\mathrm{adj}A\ .$$

II. Prove or Disprove

풀이)

$$AaajA=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21}\cdots & A_{j1}\cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22}\cdots & A_{j2}\cdots & A_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{1n} & A_{2n}\cdots & A_{jn}\cdots & A_{nn} \end{bmatrix}\cdots(1)$$

이고, AadjA의 (i,j) 성분은 다음과 같다.

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots\cdots+a_{in}A_{jn}\cdots(2)$$

그런데 i=j 이면 위의 식은 A의 번째 행에 관한 |A|의 여인자 전개이고, i≠j 이면 A의 I행 성분과 j행 성분의 여인자의 곱을 더한 것이 되므로 0이다.

따라서

$$AaajA=\begin{bmatrix} |A| & 0\cdots & & 0 \\ 0 & |A|\cdots & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & |A| \end{bmatrix}=|A|\,I_n\cdots(3)$$ 이고, 행렬 A가 가역이므로 |A|≠0이다.

식(3)을 |A|로 나누면 다음을 얻는다.

$$\frac{1}{|A|}[Aaaj(A)]=I_n \Rightarrow A[\frac{1}{|A|}aaj(A)]=I_n$$

따라서 $A^{-1}=\frac{1}{|A|}aaj(A)$이다. ■

(2) 다음 등식이 성립함을 보여라.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}=(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)$$

풀이)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a & d-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 & d^2-a^2 \\ a^3 & b^3-a^3 & c^3-a_3 & d^3-a_3 \end{vmatrix}=1\cdot\begin{bmatrix} b-a & c-a & d-a \\ b^2-a^2 & c^2-a^2 & d^2-a^2 \\ b^3-a^3 & c^3-a_3 & d^3-a_3 \end{bmatrix}$$

행렬 A의 임의의 한 열에 k 배 한 행렬을 B 라고 하면

$|B|=k|A|$ 이기 때문에

$$=(b-a)(c-a)(b-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+a & c+a & d+a \\ b^2+ba+a^2 & c^2+ca+a^2 & d^2+da+a^2 \end{vmatrix}$$

$$=(b-a)(c-a)(b-a)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b+a & c-b & d-b \\ b^2+ba+a^2 & c^2+ca-ba-b^2 & d^2+da-ba-b^2 \end{vmatrix}$$

$$=(b-a)(c-a)(b-a)\cdot 1\cdot\begin{vmatrix} c-b & d-b \\ c^2+ca-ba-b^2 & d^2+da-ba-b^2 \end{vmatrix}$$

$$=(b-a)(c-a)(b-a)\cdot 1\cdot\begin{vmatrix} c-b & d-b \\ (c-b)(a+b+c) & (d-b)(a+b+d) \end{vmatrix}$$

$$=(b-a)(c-a)(b-a)(c-b)(d-b)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ (a+b+c) & (a+b+d) \end{vmatrix}$$

$$=(b-a)(c-a)(b-a)(c-b)(d-b)(d-c)$$

(3) 원점 O 를 품는 평면상의 삼각형 OAB의 면적이

$A=\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$임을 보여라.

풀이) R^3 위의 점 $A(x_1,y_1,0)$, $B(x_2,y_2,0)$의

벡터 $\overrightarrow{OA}=(x_1,y_1,0)$ $\overrightarrow{OB}=(x_2,y_2,0)$ 의 외적의 크기 $\|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}\|$은

두 벡터로 둘러싸여 만들어지는 평행사변형의 넓이와 같다.

벡터 $\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & y_1 & 0 \\ x_2 & y_2 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \mathbf{k} & \mathbf{i} & \mathbf{j} \\ 0 & x_1 & y_1 \\ 0 & x_2 & y_2 \end{vmatrix}=\mathbf{k}\begin{vmatrix} \mathrm{x}_1 & \mathrm{y}_1 \\ \mathrm{x}_2 & \mathrm{y}_2 \end{vmatrix}$ 이고

평행사변형의 넓이 $=\|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}\|=\sqrt{0^2+0^2+\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}}=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$

삼각형 OAB 의 넓이는 두 벡터로 만들어지는 평행사변형의 넓이의 $\frac{1}{2}$ 이므로

$A=\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$ ■

(4) $\left|\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}\right|=|A|\,|B|$ where $A\in M_p$ and $D\in M_q$.

풀이) Disprove

$E_1=\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix}$, $E_2=\begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$ 라 하고,

$E_1E_2=\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} AD & B \\ 0 & D \end{bmatrix}$

det(E_1E_2) = $\begin{bmatrix} AD & B \\ 0 & D \end{bmatrix}$ = det(AD)det(D)

det(E_1)det(E_2) = det(AD) × det(D)

det(E_2) = det(D)이므로,
det(E_1) = det(AD)

그러므로, $\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix}$= det(AD)
= det(A) × det(D)
= |A||D|

(5) 3×3인 행렬 A 와 invertible 행렬 B에 대해, show that there is a scalar k such that $\det(A+kB)=0$.

풀이)

$$A+kB=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}+k\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$ 라고하면

k에 관한 3차방정식인 $det(A+kB)=detA+\alpha k+\beta k^2+(detB)k^3=0$, $detB\neq0$ 이므로 3차식인 $det(A+kB)$는 적어도 하나의 실근을 가진다.