Ⅲ. 이차함수

1. 이차함수와 그 그래프
2. 이차함수의 최대, 최소
3. 이차함수의 그래프와 직선의 위치관계
4. 이차함수와 방정식, 부등식
5. 이차함수의 활용

1 이차함수와 그 그래프

학습목표

- 이차함수의 뜻을 이해한다.
- 이차함수의 그래프를 그릴 수 있다.

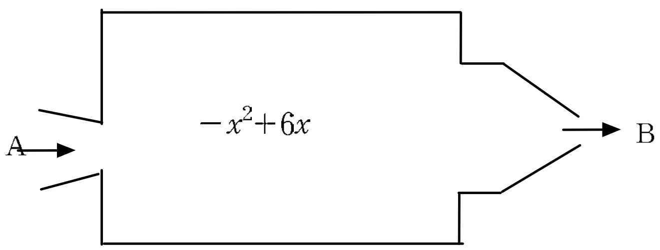
(1) 이차함수와 그 그래프

탐구활동

[과제1] 이차함수의 연산 장치 (천재교육 10-나 지도서 172쪽, 이방수 외)

- 목표 : 연산장치 모양의 프로그램을 이용하여 이차함수의 관계식을 이해할 수 있다.

아래와 같은 연산장치를 만들었다. 이 연산장치 A에 x값을 입력하면 B에 그 결과의 값 y가 출력된다.



1. 다음 표의 입력되는 수 x 에 따라 출력되는 수 y를 적어 보아라.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y										

2. y의 값이 음이 아닐 때, A에 입력된 수 x의 값의 범위를 구해 보아라.

3. 이 프로그램은 어떤 함수를 나타내고 있는지 생각해 보고 함수의 관계식을 구해 보아라.

4. 이 함수의 그래프를 좌표평면 위에 그려보아라.

<해설>

1. 주어진 연산장치에서 입력되는 수 x에 따라 출력되는 수 y를 적어보면 다음과 같다.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	5	8	9	8	5	0	-7	-16	-27	-40

2. y의 값이 음이 아니려면 $-x^2+6x\geqq 0$이 되어야 하므로

$$-x^2+6x\geqq 0 \Leftrightarrow x^2-6x\leqq 0 \Leftrightarrow x(x-6)\leqq 0 \Leftrightarrow 0\leqq x\leqq 6$$

따라서, 구하는 x의 값의 범위는 $0\leqq x\leqq 6$이 된다.

3. 이 연산장치는 이차함수를 나타내고 있으며 함수의 관계식은 $y=-x^2+6x$가 된다.

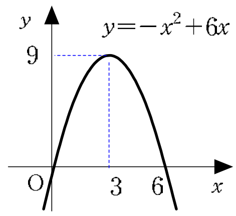
4. 주어진 식을 완전 제곱식으로 나타내면

$$y=-x^2+6x=-(x-3)^2+9$$

이 곡선의 그래프는 최고차 항의 계수가 음수이므로 위로 볼록하고, 꼭지점의 좌표는 (3, 9)이다.

또, x축과 만나는 점의 좌표는 $-x(x-6)=0$에서 $x=0$, $x=6$이다.

따라서, 그래프를 그리면 오른쪽 그림과 같다.



[과제2] 이차함수의 그래프의 일반형

- 목표 : 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 계수 a, b, c의 값에 따라 어떻게 그려지는지 확인한다. 또, 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 x축과 만나는 점의 개수가 판별식 b^2-4ac의 값과 어떤 관계가 있는지 이해하도록 한다.

1. 이차함수 $y=ax^2$에 대하여 a의 값이 양수일 때와 음수일 때 이차함수의 그래프가 어떻게 변하는지 그래프그리미를 이용하여 확인하여 보고 이를 설명하여라.

2. 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프를 그래프그리미를 이용하여 그리고 a, b, c의 값의 변화에 따라 그래프를 탐구하여라.
   (1) 이차함수 $y=ax^2+bx+c$에 대하여 b의 값에 따른 꼭지점의 x좌표의 부호와 대칭축의 위치변화를 설명하여라.
   (2) 이차함수 $y=ax^2+bx+c$에 대하여 c의 값에 따라 이차함수의 그래프가 어떻게 변하는지 설명하여라.
   (3) 이차함수 $y=ax^2+bx+c$에 대하여 a, b, c의 값을 다양하게 변화시키면서 그래프그리미로 그래프를 그리고 x축과 만나는 점의 개수를 확인하여라.
   (4) 위의 (3)의 결과와 b^2-4ac의 값과의 관련성을 찾고 이를 설명하여라.

<해설>

1. 이차함수 $y=ax^2$ 의 그래프는 a 의 값이 양수일 때 아래로 볼록하고, a 의 값이 음수일 때 위로 볼록한 모양이 된다.

2. (1) 이차함수 $y=ax^2+bx+c$ 에 대하여 a, b 의 값의 부호가 같으면($ab>0$) 꼭지점의 x 좌표가 음수이고, a, b 의 값의 부호가 다르면($ab<0$) 꼭지점의 x 좌표가 양수이다.

이차함수를 완전제곱꼴로 바꾸면

$y=ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$ 에서

대칭축의 방정식은 $x=-\frac{b}{2a}$ 이다.

여기서, $-\frac{b}{2a}<0$ ($ab>0$)이면 이차함수의 대칭축은 y 축의 왼쪽에 있고,

$-\frac{b}{2a}>0$ ($ab<0$)이면 이차함수의 대칭축은 y 축의 오른쪽에 있다.

(2) 이차함수 $y=ax^2+bx+c$ 에 대하여 a, b 의 값을 미리 정하고 c 의 값만 움직이면 이차함수의 그래프는 y 축의 방향으로 평행이동한다.

(3) 이차함수 $y=ax^2+bx+c$ 에 대하여 a, b, c 의 값을 다양하게 변화시켜 x 축과의 교점의 개수를 확인한다.

(4) 이차함수를 완전제곱꼴로 바꾸면

$y=ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$ 이다.

여기서 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.

(i) $b^2-4ac>0$ 이면 x 축과 서로 다른 두 점에서 만난다.

(ii) $b^2-4ac=0$ 이면 x 축과 한 점에서 만난다.

(iii) $b^2-4ac<0$ 이면 x 축과 만나지 않는다.

개 념 정 리

이차함수의 그래프

(1) 이차함수 $y=ax^2$ 의 그래프

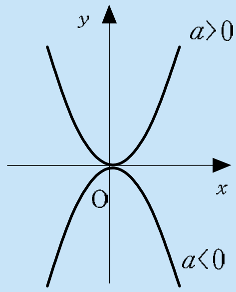
① 꼭지점은 원점(0, 0)이다.

② y축에 대하여 대칭이다.

③ $a>0$이면 아래로 볼록하고,

$a<0$이면 위로 볼록하다.

④ $|a|$ 가 클수록 폭이 좁다.(즉, y축에 가깝다.)

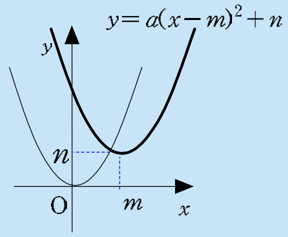


(2) 이차함수 $y=a(x-m)^2+n$ 의 그래프

① $y=ax^2$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 것이다.

② 꼭지점의 좌표 : $(m,\ n)$

③ 대칭축의 방정식 : $x=m$



형 성 평 가

1. 다음 이차함수의 꼭지점의 좌표와 대칭축의 방정식을 구하고, 그 그래프를 그려라

(1) $y=(x-3)^2$　　　(2) $y=x^2-4x+3$

(3) $y=-x^2+4x-2$　　　(4) $y=(x-3)(1-x)$

2. 이차함수 $y=x^2$ 의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동하였더니 이차함수 $y=x^2-6x+13$ 의 그래프와 겹쳐졌다. 이 때, 상수 m, n의 값을 구하여라.

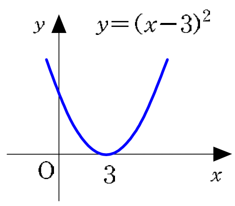
3. 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 꼭지점은 $(2,\ 3)$이고, 점 $(3,\ 4)$를 지날 때, 상수 $a+b+c$의 값을 구하여라.

<풀이>

1. (1) $y=(x-3)^2$

꼭지점의 좌표 : $(3,0)$

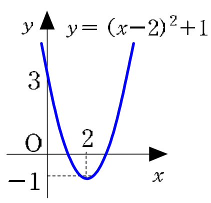
축의 방정식 : $x=3$



(2) $y=x^2-4x+3=(x-2)^2-1$

꼭지점의 좌표 : $(2,-1)$

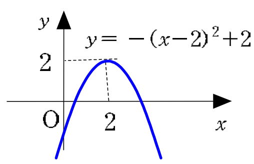
축의 방정식 : $x=2$



(3) $y=-x^2+4x-2=-(x-2)^2+2$

꼭지점의 좌표 : $(2,2)$

축의 방정식 : $x=2$



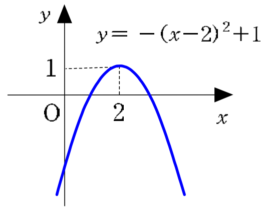
(4) $y=(x-3)(1-x)$

$\quad =-x^2+4x-3$

$\quad =-(x-2)^2+1$

꼭지점의 좌표 : $(2,1)$

축의 방정식 : $x=2$



2. 주어진 식을 완전제곱꼴로 나타내면

$y=x^2-6x+13=(x-3)^2+4$

즉, $y=x^2-6x+13$의 그래프는 $y=x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 그래프이다.

$\therefore\ m=3,\ n=4$

3. 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 꼭지점이 $(2,3)$이므로

$y=ax^2+bx+c=a(x-2)^2+3$

이 함수의 그래프는 점 $(3,4)$를 지나므로 $x=3$를 대입하면

$4=a+3,\ \therefore\ a=1$

$y=(x-2)^2+3=x^2-4x+7$ 에서 $a=1,\ b=-4,\ c=7$

$\therefore\ a+b+c=4$

2 이차함수의 최대, 최소

학습목표

- 이차함수의 최대값, 최소값을 구할 수 있다.

(1) 이차함수의 최대, 최소

탐 구 활 동

[과제1] 직사각형의 넓이 (천재교육 10-나 지도서 175쪽, 이방수 외)

- 목표 : 직사각형의 넓이를 구하는 과정에서 이차함수의 관계식을 유도해 낼 수 있도록 한다. 또한 주어진 조건에서 정의역의 범위를 찾을 수 있게 하고, 그를 통해 함수의 최대값과 최소값을 구해 봄으로써 우리 주변에서 함수의 최대, 최소의 개념이 어떻게 이용될 수 있는지 이해하도록 한다.

둘레의 길이가 20인 직사각형에 대하여 다음 물음에 답하여라.

1. 가로의 길이를 x라 할 때, 세로의 길이를 x에 대한 식으로 나타내어라.

2. 직사각형의 넓이를 y라 할 때, x에 대한 식으로 나타내어라.

3. 위의 2.에서 얻은 함수를 좌표평면에 그려 보아라.

4. 직사각형의 넓이가 최대가 될 때의 x의 값을 구하고, 이 때 직사각형의 넓이를 구하여라.

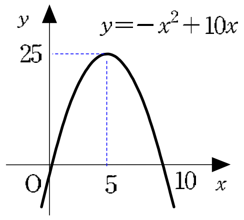
<해설>

1. 둘레의 길이가 20으로 정해져 있기 때문에 가로의 길이를 x라고 했을 때, 세로의 길이를 z라고 하면 $2x+2z=20$이 되므로 $z=10-x$가 된다.
   즉, 세로의 길이는 $10-x$

2. (직사각형의 넓이)=(가로의 길이) ×(세로의 길이)이므로
   $y=x(10-x)$

3. 주어진 식을 완전 제곱식으로 나타내면
   $y=x(10-x)=-x^2+10x=-(x-5)^2+25$

이 곡선의 그래프는 최고차 항의 계수가 음수이므로 위로 볼록하고, 꼭지점의 좌표는 $(5, 25)$ 이다.
또, x축과 만나는 점의 좌표는 $x(10-x)=0$에서 $x=0$, $x=10$이다.
따라서, 그래프를 그리면 오른쪽 그림과 같다.



4. $y=x(10-x)=-x^2+10x=-(x-5)^2+25$
   따라서, 넓이 y가 최대가 될 때의 x의 값은 5 이고, 그 때의 넓이는 25 이다.

[과제2] 농구선수의 점프높이 (천재교육 10-나 지도서 204쪽, 신현성외)

● 목표 : 물체의 운동을 나타내는데 이차함수가 이용됨을 경험하게 하여 실생활 문제를 해결하는 즐거움을 맛볼 수 있다. 위로 던진 물체의 시간 t에 대한 높이 h를 나타낸 이차함수 식에서 최고 높이는 이차함수의 꼭지점의 y좌표이며 땅에 떨어지는 시간은 $h(t)=0$ 일 때의 t의 값이 됨을 안다.

높이 Hm인 빌딩의 옥상에서 v_0m/sec의 속력으로 위를 향하여 공중에 던질 때, t초 후의 높이 h에 관한 식은 다음과 같이 주어진다.

$$h(t)=v_0t-4.9t^2+H$$

농구시합에서 농구 선수가 골을 넣기 위해 공중으로 솟아오를 때, 그의 점프 높이에 위의 공식을 적용할 수 있다고 한다. 이를 이용하여 다음 물음에 답하여라.

1. 한 선수가 4.9m/sec의 속력으로 점프한다면 t초 후의 선수의 높이 h에 대하여 어떤 관계식을 얻을 수 있겠는가? (단, 농구선수는 농구장 바닥으로부터 솟아오르므로 $H=0$으로 한다.)

2. 1에서 구한 관계식을 나타내는 함수의 그래프를 좌표평면 위에 그려라.

3. 위에서 구한 함수에 대하여 아래 표의 함수값을 구해 보아라.

t의 값	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
$h(t)$ 의 값						

4. 이 농구 선수는 최고 몇 m까지 점프를 할 수 있는가?

5. 이 선수가 점프를 하고 난 후 땅에 떨어지는 시간은 몇 초 후인가?

<해설>

1. $v_0=4.9$, $H=0$이므로 t초 후의 선수의 높이 $h(t)$는

$h(t)=4.9t-4.9t^2$

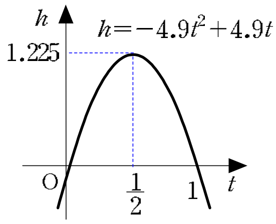
2. $h(t)=-4.9t^2+4.9t=-4.9(t^2-t)=-4.9\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+1.225$

이 곡선의 그래프는 최고차 항의 계수가 음수이므로 위로 볼록하고, 꼭지점의 좌표는 $(0.5,\ 1.225)$이다.

또, t축과 만나는 점의 좌표는 $-4.9t^2+4.9t=0$에서

$t=0$, $t=1$이다.

따라서, 그래프를 그리면 오른쪽 그림과 같다.



3. $h(t)=-4.9t^2+4.9t$에서

$t=0$, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0을 차례로 대입하면

t의 값	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
$h(t)$의 값	0	0.784	1.176	1.176	0.784	0

4. 그래프에서 $t=\frac{1}{2}$(초)일 때, 최고의 높이는 1.225(m)이다.

5. 선수가 땅에 떨어지면 $h(t)=0$이므로 $-4.9t^2+4.9t=0$에서 $t=0$, $t=1$

따라서, 이 선수는 1초 후에 땅에 떨어진다.

개 념 정 리

이차함수의 최대, 최소

(1) 이차함수 $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$의 최대, 최소

이차함수 $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$의 최대값과 최소값을 구할 때는 $y=a(x-m)^2+n$의 꼴로 고친다.

① $a>0$이면 y는 $x=m$일 때, 최소값 n을 갖는다.

② $a<0$이면 y는 $x=m$일 때, 최대값 n을 갖는다.

(2) 제한된 범위에서의 최대 · 최소

① $x=m$ (대칭축)이 제한된 범위에 포함되는 경우 ($\alpha\leq m\leq\beta$)

$f(m)$, $f(\alpha)$, $f(\beta)$ 중 가장 큰 것이 최대값이고,

가장 작은 것이 최소값이다.

② $x=m$ (대칭축)이 제한된 범위에 포함되지 않는 경우 ($m<\alpha$ 또는 $m>\beta$)

형 성 평 가

1. 다음 함수의 최대값, 최소값을 구하여라.

(1) $y=x^2+4$

(2) $y=x(x+8)$

(3) $y=-(x-2)^2-3$

(4) $y=2x^2-8x+3$

2. 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프는 $x=2$일 때 최대값 3을 갖고 점 $(3,\ 1)$를 지난다. 이 때, $a+b+c$의 값을 구하여라.

3. 이차함수 $f(x)=x^2-2x+3\ (0\leqq x\leqq 3)$의 최대값과 최소값을 구하여라.

<**풀이**>

1. (1) 아래로 볼록한 포물선이다.

따라서, 최소값이 4이고, 최대값은 없다.

(2) $y=x(x+8)$

$=(x+4)^2-16$

따라서, $x=-4$일 때 최소값은 -16이고, 최대값은 없다.

(3) $y=-(x-2)^2-3$은 위로 볼록한 함수이다

따라서, $x=2$일 때 최대값이 -3이고, 최소값은 없다.

(4) $y=2x^2-8x+3$

$=2(x-2)^2-5$

따라서, $x=2$일 때 최소값은 -5이고, 최대값은 없다.

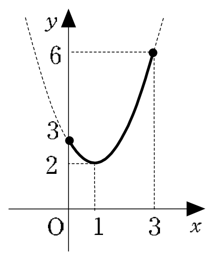
2. $x=2$일 때 최대값 3을 가지므로 $y=a(x-2)^2+3\ (a<0)$이 되고 점 $(3,\ 1)$을 지나므로 $1=a(3-2)^2+3$ $\therefore\ a=-2$

따라서 $y=-2(x-2)^2+3=-2x^2+8x-5$에서 $a=-2,\ b=8,\ c=-5$

$\therefore\ a+b+c=1$

3. $y=x^2-2x+3=(x-1)^2+2$이고, $f(0)=3$, $f(3)=6$이므로 함수 $f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

$x=3$일 때 최대값 6, $x=1$일 때 최소값 2



3 이차함수의 그래프와 직선의 위치관계

학습목표

- 이차함수의 그래프와 직선의 위치관계를 이해한다.

(1) 이차함수의 그래프와 직선의 위치관계

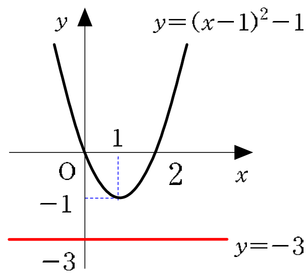
탐 구 활 동

[과제1] 움직이는 직선과 이차함수의 그래프의 위치관계

(천재교육 10-나 지도서 178쪽, 이방수 외)

- 목표 : 움직이는 직선과 이차함수의 그래프를 통해서 직선이 움직일 때마다 이차함수의 그래프와 직선 사이의 위치관계가 어떻게 바뀌는지를 보여 줌으로써 이차함수의 그래프와 직선 사이의 위치관계를 이해한다.

이차함수 $y=(x-1)^2-1$와 $y=-3$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 이 때, $y=-3$인 직선 l을 y축의 양의 방향으로 매초 1만큼씩 움직여보자.



1. 1초 후 직선 l의 방정식을 구하여라.
2. 이차함수의 그래프와 직선 l이 처음으로 만날 때는 직선 l이 움직이기 시작하여 몇 초가 되었을 때인가?
3. 이차함수의 그래프와 직선 l의 교점이 2개가되는 때는 직선 l이 움직이기 시작하여 몇 초가 지난 후인가?
4. 직선 l이 움직이기 시작하여 3초가 되었을 때, 이차방정식의 그래프와 직선이 만나는 점의 좌표를 구하여라.

<해설>

1. y축의 양의 방향으로 매초 1만큼씩 움직이므로 1초 후 l은 $y=-3+1=-2$
2. 이차함수 $y=(x-1)^2-1$이 처음으로 직선 l과 만나는 점은 이차함수의 꼭지점이 되고, 꼭지점의 좌표가 $(1,\ -1)$이므로 직선 l이 움직이기 시작한지 2초가 되었을 때 이차함수의 그래프와 만나게 된다.
3. 직선 l은 이차함수 $y=(x-1)^2-1$과 처음 꼭지점에서 만나게 되고 그 이후로는 두 점에서 만나게 된다. 따라서 직선 l이 움직이기 시작한지 2초 후에 직선 l이 이차함수의 그래프와 두 점에서 만난다.
4. 직선 l은 y축의 양의 방향으로 매초 1만큼씩 움직여서 3초 후 직선 l의 방정식은

$y=0$이 된다. 즉, 직선 l과 x축이 겹쳐지게 되므로

$(x-1)^2-1=0$ 에서 $x=0$, $x=2$

따라서, 직선 l과 이차함수 $y=(x-1)^2-1$과의 교점의 좌표는 $(0, 0)$, $(2, 0)$이다.

[과제2] 이차함수와 직선의 그래프의 교점의 개수

(천재교육 10-나 지도서 214쪽, 신현성 외)

- 목표 : 이차함수의 그래프와 직선의 그래프의 교점의 개수는 연립이차방정식의 실수해의 개수와 같음을 이해하고 직선을 평행이동시키면서 교점의 개수의 변화를 살펴 본다.

다음 연립방정식에 대하여 물음에 답하여라.

$$\begin{cases} y=-x^2 & \cdots\cdots ① \\ y=x+k & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

1. 연립방정식의 실수해를 구하기 위해 ②를 ①에 대입하여 정리하여라.

2. 위에서 정리한 식은 x에 대한 이차방정식이다. 이 때, k의 범위에 따른 이 방정식의 실수해의 개수를 구하여라.

3. 이 연립방정식의 실수해는 이차곡선과 직선의 교점의 x좌표이다. 그래프그리미를 이용하여 위의 두 그래프를 그리고, 두 그래프의 교점의 개수에 따라서 k의 값의 범위가 어떻게 변하는지 알아보아라

<해설>

1. ②를 ①에 대입하고 정리하면

$x+k=-x^2$, $\therefore\ x^2+x+k=0$

2. 이차방정식의 실수해의 개수는 판별식에 따라 결정된다.

$D=1^2-4\cdot1\cdot k=1-4k$에서

(i) $D>0$ 즉, $k<\frac{1}{4}$일 때, 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(ii) $D=0$ 즉, $k=\frac{1}{4}$일 때, 중근을 갖는다.

(iii) $D<0$ 즉, $k>\frac{1}{4}$ 일 때, 서로 다른 두 허근을 가진다.

3. 두 그래프의 교점의 개수가 2개이면 $k<\frac{1}{4}$

두 그래프의 교점의 개수가 1개이면 $k=\frac{1}{4}$

두 그래프의 교점의 개수가 0개이면 $k>\frac{1}{4}$

개념정리

이차함수의 그래프와 직선의 위치관계

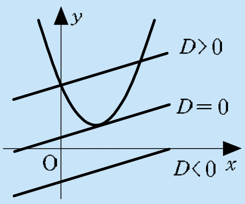
이차함수 $y=ax^2+bx+c$ 의 그래프와 직선 $y=mx+n$ 의 위치 관계는 다음과 같이 판별할 수 있다.

이차방정식 $ax^2+(b-m)x+c-n=0$ 의 판별식을 D 라고 할 때

① 서로 다른 두 점에서 만난다. $\Rightarrow$ $D>0$

② 한 점에서 만난다. (접한다) $\Rightarrow$ $D=0$

③ 만나지 않는다. $\Rightarrow$ $D<0$



형성평가

1. 다음 두 함수의 그래프의 교점의 개수를 구하여라.

(1) $y=x^2+4x-7$, $y=6x-13$

(2) $y=3x^2+4x-1$, $y=2x+3$

(3) $y=x^2-3x+5$, $y=3x-4$

2. 이차함수 $y=x^2-2x+5$의 그래프와 직선 $y=2x+k$가 다음 조건을 만족할 때, 실수 k의 값 또는 k의 값의 범위를 구하여라

(1) 서로 다른 두 점에서 만난다.

(2) 접한다.

(3) 만나지 않는다

3. 이차함수 $y=x^2+4x-3$의 그래프와 직선 $y=3x+9$과의 교점의 좌표를 구하여라.

4. 이차함수 $y=x^2-2x+3$의 그래프에 접하고 기울기가 2 인 직선의 방정식을 구하여라.

<풀이>

1. (1) $x^2+4x-7=6x-13$에서 $x^2-2x+6=0$

$D=(-2)^2-4\cdot1\cdot6=-20<0$

따라서, 두 그래프의 교점의 개수는 0 개이다

(2) $3x^2+4x-1=2x+3$에서 $3x^2+2x-4=0$

$D=(2)^2-4\cdot3\cdot(-4)=52>0$

따라서, 두 그래프의 교점의 개수는 2 개이다

(3) $x^2-3x+5=3x-4$에서 $x^2-6x+9=0$

$D=(-6)^2-4\cdot1\cdot9=0$

따라서, 두 그래프의 교점의 개수는 1 개이다

2. 두 식에서 y를 소거하여 나온 이차식의 판별식을 D라 하면

$x^2-4x+5-k=0$에서 $\frac{D}{4}=(-2)^2-(5-k)=k-1$

(1) 서로 다른 두 점에서 만날 때 $\frac{D}{4}>0$이므로 $k>1$

(2) 접하려면 $\frac{D}{4}=0$이므로 $k=1$

(3) 만나지 않으려면 $\frac{D}{4}<0$이므로 $k<1$

3. $x^2+4x-3=3x+9$에서 교점의 x좌표는 $x=-4$, $x=3$

따라서, 이 값을 직선에 대입하여 교점의 좌표를 구하면

구하는 교점의 좌표는 $(-4,\ -3)$, $(3,\ 18)$

4. 구하는 직선의 방정식을 $y=2x+k$라 놓고 $y=x^2-2x+3$에 대입하여 정리하면

$x^2-4x+3-k=0$

직선이 포물선에 접하므로

$\frac{D}{4}=(-2)^2-(3-k)=1+k=0$

$\therefore\ k=-1$

따라서, 구하는 직선의 방정식은 $y=2x-1$

4 이차함수와 방정식, 부등식

학습목표

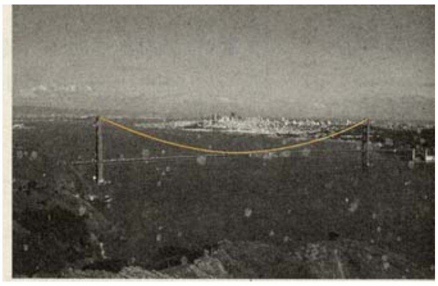
- 이차함수의 그래프를 이용하여 이차방정식의 근을 구할 수 있게 한다.
- 이차함수의 그래프를 이용하여 이차부등식을 풀 수 있게 한다.

(1) 이차함수와 이차방정식

탐구활동

[과제1] **현수교** (대한교과서 10-나 지도서 190쪽, 우정호 외)

- 목표 : 이차함수의 그래프와 x축의 위치관계를 이용한 이차방정식의 해법에서 함수의 그래프가 x축과 만난 점의 y좌표는 0이라는 것에 착안하여 그 교점의 x좌표가 구하는 근임을 이해하도록 한다. 그러나 이차함수의 그래프는 x축과 만나지 않을 경우도 있다는 것을 유의시킴으로써 허근의 뜻을 이해할 수 있도록 한다.



우리나라의 남해대교나 올림픽대교, 또 새로 건설하고 있는 영종대교는 다리의 기둥과 기둥사이에 포물선 모양의 케이블이 드리워진 현수교이다. 세계에서 가장 긴 현수교는 영국의 험버 에스튜어리에 있는 현수교로, 다리의 상판을 x축이라 할 때 상판으로부터 케이블까지의 높이 y는 대략 다음과 같은 식으로 표현할 수 있다.

$$y=0.0003x^2$$

케이블과 상판은 몇 개의 점에서 만나는가? (그래프그리미)

<해설>

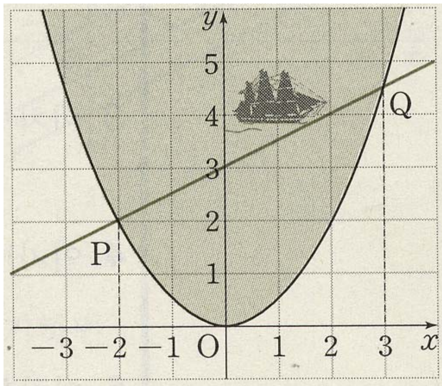
현수교의 케이블이 그리는 포물선을 이차곡선으로, 다리의 상판을 x축으로 해석한다.

이차함수 $y=0.0003x^2$의 그래프는 x축과 한 점 $(0,0)$에서 만난다.

따라서 케이블과 다리의 상판은 한 점에서 만난다.

[과제2] 여객선의 항로 (지학사 10-나 지도서 213쪽, 이강섭 외)

- 목표 : 포물선 모양의 해안선과 직선 항로를 나타내는 식으로부터 두 항구를 나타내는 좌표를 찾고, 그 거리를 구하도록 한다.



포물선 모양의 해안선에 위치한 두 도시 P, Q 사이를 직선 항로로 운항하는 정기여객선이 있다. 해안선을 나타내는 식은 $y=\frac{1}{2}x^2$이고, 여객선의 항로는 직선 $y=\frac{1}{2}x+3$의 일부분인 P와 Q 사이라고 한다.
그래프그리미를 이용하여 두 함수의 그래프를 그려 보고 이 여객선의 항로의 길이, 즉 두 도시 P, Q 사이의 거리를 다음과 같은 순서로 구하여 보자.

1. 다음 연립방정식의 해를 구하여 보자.

$$\begin{cases} y=\frac{1}{2}x^2 \\ y=\frac{1}{2}x+3 \end{cases}$$

2. 두 도시 P, Q 를 나타내는 점의 좌표를 구하여 보자.
3. 두 도시 P, Q 사이의 거리를 구하여 보자. (공학용계산기)

<해설>

1. $\begin{cases} y=\frac{1}{2}x^2 & \cdots ① \\ y=\frac{1}{2}x+3 & \cdots ② \end{cases}$

①, ②에서 $\frac{1}{2}x^2=\frac{1}{2}x+3$

$x^2-x-6=0, \quad (x-3)(x+2)=0$

$\therefore \quad x=3$ 또는 $x=-2$

$\therefore \begin{cases} x=3 \\ y=\frac{9}{2} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-2 \\ y=2 \end{cases}$

2. (물음1)에서 구한 연립방정식의 해를 (x, y)로 나타내면 두 점 $\left(3, \frac{9}{2}\right)$, $(-2, 2)$는 두 식을 동시에 만족하므로 두 함수 그래프에서 교점의 좌표가 된다.

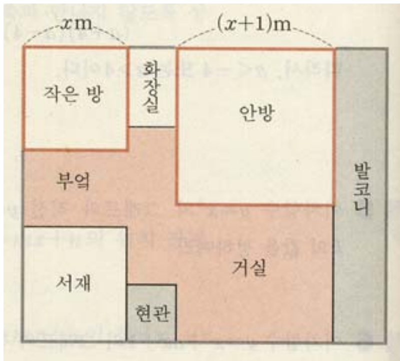
$\therefore$ P$(-2, 2)$, Q$\left(3, \frac{9}{2}\right)$

3. $\overline{PQ}=\sqrt{(3+2)^2+\left(\frac{9}{2}-2\right)^2}=\sqrt{\frac{125}{4}}=\frac{5\sqrt{5}}{2} \fallingdotseq 5.59$

[과제3] **집의 구조** (중앙 10-나 지도서 187쪽, 최봉대 외)

- 목표 : 이 탐구활동은 이차방정식의 해를 다양한 방법으로 구할 수 있다는 것을 알게 하는 것이다. 주어진 조건에 맞는 이차방정식을 세우고 근의 공식을 이용하여 해를 구한 다음 계산기를 이용하여 근사값을 구하는 활동을 하게 한다. 또한, 컴퓨터 프로그램을 이용하여 이차함수의 그래프를 그리고 x축과 만나는 교점의 x좌표를 찾는 활동을 통하여 이차방정식의 해를 구할 수 있게 한다.

오른쪽 그림은 선희네 집의 구조이다. 색선으로 표시된 작은 방의 넓이와 안방의 넓이의 합이 27㎡라고 할 때, 다음 물음에 답하여 보자. (단, 방의 모양은 모두 정사각형이다.) (그래프그리미 , 공학용계산기)



1. 작은 방의 한 변의 길이를 구할 수 있는 방정식을 세워라.

2. 위에서 세운 방정식의 근 중 양의 값을 반올림하여 소수 둘째 자리까지 구하여라.

3. 그래프그리미를 이용하여 이차함수의 그래프를 그리고 양의 범위에서 x축과 만나는 점을 찾아 x좌표를 소수 둘째 자리까지 구하여라.

<해설>

1. 위의 탐구 활동에서 작은 방의 한 변의 길이를 구하는 이차방정식은

$$x^2+(x+1)^2=27,\quad x^2+x-13=0$$

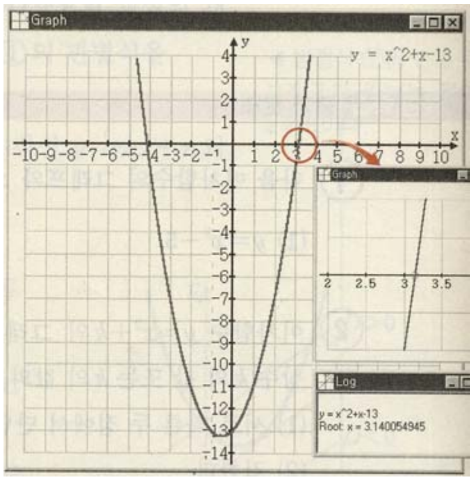
2. 이 방정식 $x^2+x-13=0$의 근은

$$x=\frac{-1+\sqrt{53}}{2}$$

이고, $\sqrt{53}\fallingdotseq 7.28$이므로 $x\fallingdotseq 3.14$이다.

3. 이차함수 $y=x^2+x-13$의 그래프만 보면 이 그래프가 x축과 만나는 점 중 양의 x좌표는 약 3.14임을 알 수 있다.

이와 같이 이차방정식의 실근을 구할 경우, 근의 공식을 이용할 수도 있지만, 이차함수의 그래프가 x축과 만나는 점의 좌표를 읽어서 구할 수도 있다.



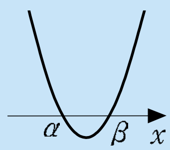
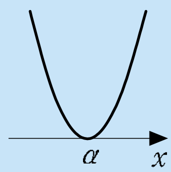
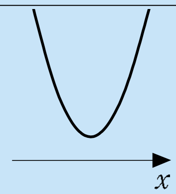
[참고]
위의 탐구 활동에서 컴퓨터 프로그램을 이용하는 방법은 다음과 같다.
(i) 「Equation grapher」라는 프로그램을 실행시킨다.
(ii) 수식 입력란에 x^2 + x - 13 을 입력한다.
(iii) 아이콘을 누르면 이차함수 $y=x^2+x-13$의 그래프가 그려진다.
(iv) 메뉴 Solve에서 Root를 클릭한 후에 마우스를 이용하여 그래프가 x축과 만나는 점 주위를 클릭하면서 드래그한다.
(v) 화면 왼쪽 하단에 Log라는 창에 그래프와 x축이 만나는 점의 x좌표가 나타난다.
※ 「Equation grapher」라는 프로그램은
http://www.mfsoft.com 또는 http://www.mathlove.or.kr
에서 다운 받을 수 있다.

개념정리

이차함수와 이차방정식

이차함수 $y=ax^2+bx+c$ 의 그래프와 x축의 교점의 개수는 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ 의 실근의 개수와 같다.

이차함수 $y=ax^2+bx+c$ 의 그래프와 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ 은 다음과 같은 관계가 있다. (단, $D=b^2-4ac$)

$a>0$	$D>0$	$D=0$	$D<0$
$y=ax^2+bx+c$ 의 그래프			
$ax^2+bx+c=0$ 의 해	$x=\alpha$ 또는 $x=\beta$ (서로 다른 두 실근)	$x=\alpha$ (중근)	허근

형성평가

1. 다음은 이차함수 $y=x^2-5x+2$ 의 그래프와 x축과의 교점의 개수를 구한 것이다. □ 안에 알맞은 것을 써 넣어라.

이차함수 $y=x^2-5x+2$ 의 그래프와 x축과의 교점의 개수는 이차방정식 $\boxed{(1)}$ 의 실근의 개수와 같다. 따라서 방정식 (1)의 판별식을 D라 하면 $D=\boxed{(2)}$ 이므로 $D\ \boxed{(3)}\ 0$ 이다.
∴ 교점의 개수는 $\boxed{(4)}$ 개 이다.

2. 이차함수 $y=2x^2-3x+k$ 의 그래프가 x축과 만나지 않도록 하는 k의 값의 범위를 정하여라.

<풀이>

1. $x^2-5x+2=0$ 의 판별식은 $D=5^2-4\cdot1\cdot2=17$ 이므로 $D>0$ 이다. 따라서 교점의 개수는 2개 이다.

∴ (1) $x^2-5x+2=0$ (2) 17 (3) $>$ (4) 2

2. 주어진 이차함수의 그래프가 x축과 만나지 않는 경우는 이차방정식 $2x^2-3x+k=0$ 의 판별식 D가 $D<0$ 일 때이다. 따라서 $D=9-4\cdot2\cdot k=9-8k<0$ ∴ $k>\frac{9}{8}$

(2) 이차함수와 이차부등식

탐구활동

[과제1] 사과나무 (고려출판 10-나 지도서 197쪽, 최상기 외)

- 목표 : 실생활 문제를 이차함수를 활용하여 해결할 수 있다.

어느 과수원에서 사과를 재배하고 있다. 단위 면적당 심어져 있는 사과나무의 개수를 x그루, 사과의 하루 수확량을 $y$kg이라 할 때, x, y사이에는 $y=-\frac{1}{2}x^2+4x$ 인 관계가 있다고 한다.

1. 이 과수원의 하루 수확량이 6kg이상이려면 단위 면적당 몇 그루의 사과나무를 심어야 하는가?

2. 그래프그리미를 이용하여 $y=-\frac{1}{2}x^2+4x$ 와 $y=6$ 의 그래프를 그려 확인하여 보아라.

<해설>

1. $-\frac{1}{2}x^2+4x \geqq 6$ 이어야하므로

$x^2-8x+12 \leqq 0$, $(x-2)(x-6) \leqq 0$

$\therefore 2 \leqq x \leqq 6$

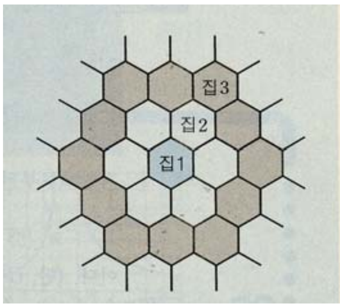
따라서, 단위 면적당 2그루 이상 6그루 이하를 심어야 한다.

2. 두 함수의 그래프를 그려 확인한다.

[과제2] 벌집의 단면 (고려출판 10-나 지도서 199쪽, 최상기 외)

● 목표 : 이차함수의 그래프를 이용하여 이차부등식을 풀 수 있다.

벌집의 단면을 보면 오른쪽 그림과 같은 육각형이 배열되어 있다. 이 배열에는 한 개의 육각형을 여섯 개의 육각형이 둘러싸고 있다.
한 개의 육각형을 '집 1', 그것을 둘러싸고 있는 여섯 개의 육각형을 '집 2', '집 2'를 둘러싸고 있는 육각형을 '집3', … 이라 하면 '집 1'에서부터 '집 r' 까지에 있는 육각형의 개수 $h(r)$는



$$h(r)=3r^2-3r+1$$

로 자연수 r에 대한 이차함수로 나타난다. 다음 물음에 답하여라.

1. '집 5'에 있는 육각형의 개수를 구하여라.
2. 이차함수의 그래프를 이용하여 $h(r)$이 169개 이상이 되도록 r의 값의 변화를 구하여라.
3. 그래프그리미를 이용하여 $h(r)=3r^2-3r+1$과 $y=169$의 그래프를 그려 확인하여 보아라.

<해설>

1. '집 5'에 있는 육각형의 개수는

$h(5)-h(4)=61-37=24$(개)

2. $h(r) \geqq 169$이므로

$3r^2-3r+1 \geqq 169$

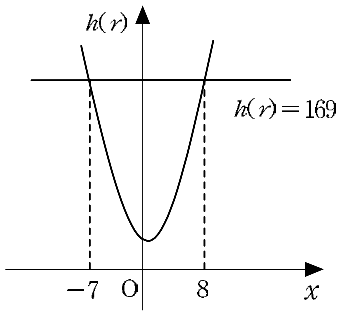
$r^2-r-56 \geqq 0$

$(r-8)(r+7) \geqq 0$

$\therefore\ r \leqq -7$ 또는 $r \geqq 8$

그런데 $r>0$이므로 $r \geqq 8$

3. 그래프를 그려 확인한다.

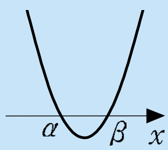
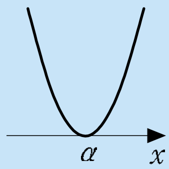
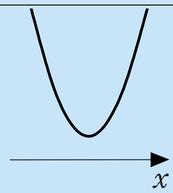


개념정리

이차함수와 이차부등식

이차부등식 $ax^2+bx+c>0$ ($a>0$)의 해는 이차함수 $y=ax^2+bx+c$ 의 그래프가 x축보다 위에 있는 x의 값의 범위이고, 이차부등식 $ax^2+bx+c<0$ 의 해는 이차함수 $y=ax^2+bx+c$ 의 그래프가 x축보다 아래에 있는 x의 값의 범위이다.

이차함수 $y=ax^2+bx+c$ 의 그래프와 이차부등식의 해 사이에는 다음과 같은 관계가 있다.

$a>0$	$D>0$	$D=0$	$D<0$
$y=ax^2+bx+c$ 의 그래프			
$ax^2+bx+c>0$ 의 해	$x<\alpha$ 또는 $x>\beta$	$x\neq\alpha$인 모든 실수	모든 실수
$ax^2+bx+c<0$ 의 해	$\alpha<x<\beta$	해는 없다	해는 없다

형성평가

1. 다음 물음에 답하여라.

(1) 이차함수 $y=x^2-4x+3$ 의 그래프를 그려라.

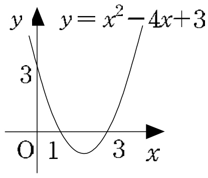
(2) 이 그래프를 이용하여 다음 부등식의 해를 구하여라.

① $x^2-4x+3<0$ ② $x^2-4x+3>0$

2. 이차함수 $y=x^2+4x+4$ 의 그래프를 이용하여 이차부등식 $x^2+4x+4>0$ 의 해를 구하여라.

<풀이>

1. $y = x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$ 이므로 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 따라서 부등식 ①의 해는 $1 < x < 3$ 이고, 부등식 ②의 해는 $x < 1$ 또는 $x > 3$이다.

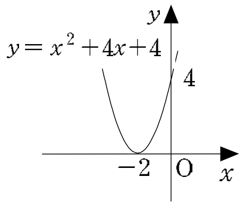


∴ (1) 그림 참조

(2) ① $1 < x < 3$ ② $x < 1$ 또는 $x > 3$

2. $y = x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2$ 이므로 그래프는 오른쪽 그림과 같이 $x = -2$ 에서 x 축과 접한다.

따라서 부등식의 해는 $x \neq -2$ 인 모든 실수이다.



5 이차함수의 활용

학습목표

- 이차함수의 최대값과 최소값을 말할 수 있다.
- 다양한 실생활의 문제를 이차함수를 이용하여 해결할 수 있다.

(1) 이차함수의 최대, 최소의 활용

탐구활동

[과제1] 농구공의 높이 (고려출판 10-나 지도서 191쪽, 최상기 외)

- 목표 : 이차함수의 최대값과 최소값을 구할 수 있다.

농구 경기 중 한 선수가 던진 공이 오른쪽 그림과 같이 포물선을 그리며 날아가 골인이 되었다. t초 후 지상으로부터의 공의 높이를 $h(t)$라 하면

$$h(t)=-4.9t^2+9.8t+1.7$$

이다. 다음 물음에 답하여라.

1. 공이 지상으로부터 가장 높이 올라갔을 때의 높이를 구하여라.

2. 그래프그리미를 이용하여 최대값을 구하여 보아라.

<해설>

1. $h(t)=-4.9t^2+9.8t+1.7$

$$=-4.9(t-1)^2+6.6$$

따라서, 공이 지상으로부터 가장 높이 올라갔을 때의 높이는 6.6이다.

2. $h(t)$의 최대값을 구하면 6.6이다

[과제2] **자동차의 연비** (대한교과서 10-나 지도서 196쪽, 우정호 외)

- 목표 : 연비에 대하여 설명한 다음, 주어진 이차함수식에서 연비 y는 속도 x의 함수로 표현되었다는 것을 이해하고 연비를 최고로 할 수 있는 속력을 구할 수 있다.

자동차를 구입할 경우에는 가격뿐만 아니라 차량의 유지비도 고려해야 하는데, 차량의 유지비 중 가장 중요한 것은 기름의 소비량이다. 기름의 소비량은 흔히 연비로 나타내는데 연비는 $1L$의 기름으로 자동차가 움직일 수 있는 거리를 말한다. 두 자동차를 일정한 양의 기름으로 운행할 때, 연비가 높은 자동차는 연비가 낮은 자동차보다 더 먼 거리를 갈 수 있다.

자동차의 종류에 따라 각각 정해져 있는 연비는 평균적인 값으로, 동일한 자동차라도 운행속도에 따라 연비가 달라진다. 대개의 경우 자동차의 운행속도는 도로의 상태나 주변 자동차의 흐름에 따르는 것이 가장 자연스러우나 가능하다면 연비가 가장 높은 속력으로 운행하는 것이 에너지 절약을 실천하는데 도움이 될 것이다.

상민이네 가족은 여러 종류의 자동차의 연비를 비교한 후, 연비가 가장 높은 자동차를 구입하기로 결정하였다. 다음은 상민이네 가족이 구입한 자동차의 연비를 계산하는 식으로, 연비 y(㎞/L)는 속도 x (km/시)에 대한 이차함수로 나타낼 수 있다.

$$y=-0.001x^2+0.14x+7.1$$

다음 물음에 답하여라.

1. 연비가 최고가 되는 속력 x를 구하여라.

2. 그래프그리미를 이용하여 연비의 최대값과 그 때의 속력 x 를 구하여라.

<해설>

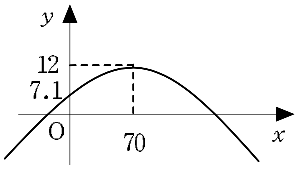
1. $y=-0.001x^2+0.14x+7.1$

$$=-\frac{1}{1000}(x^2-140x+70^2-70^2)+7.1$$

$$=-\frac{1}{1000}(x-70)^2+12$$

2. 이 이차함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 연비가 최고가 되는 속력은 70(km/시)이고, 이 때의 연비는 12(km/L)이다.



[과제3] 철새의 산소 소모량 (대한교과서 10-나 지도서 189쪽, 우정호 외)

철새는 계절이 바뀜에 따라 서식지를 옮기기 위하여 먼 거리를 이동한다. 이 때, 철새는 본능적으로 날아가는데 필요한 에너지가 가장 적게 소모되는 속도로 날아간다. 새가 날아가는데 필요한 에너지의 양은 소모되는 산소의 양으로 측정할 수 있다. 오스트레일리아에 사는 작은 잉꼬를 대상으로 조류학자가 조사한 연구 결과에 따르면 속도 x(km/시)와 산소 소모량 y(㎖)사이의 관계는 다음과 같은 이차함수로 나타내어진다.

$y=1.96x^2-130x+2920$

다음 물음에 답하여라.(공학용계산기)

1. 산소 소모량을 최소로 하는 속도 x를 구하여라.

2. 그래프그리미를 이용하여 최소값과 그 때의 속도 x를 구하여라.

<해설>

1. $y=a(x-p)^2+q(a\neq 0)$의꼴로 변형하여 문제를 해결하게 한다.

$$y=1.96x^2-130x+2920$$
$$=\frac{49}{25}x^2-130x+2920$$
$$=\frac{49}{25}\left(x-\frac{1625}{49}\right)^2+764.39$$

$x=\frac{1625}{49}\fallingdotseq 33.16$일 때, y는 최소값을 갖는다.

즉, 산소 소모량은 속도가 약 33.16(km/시)일 때 최소가 된다.

2. 속도 x의 값이 약 33.16일 때 산소 소모량의 최소값은 763.39이다.

개 념 정 리

이차함수의 최대, 최소의 활용

이차함수 $y=ax^2+bx+c$ 가 집합 D에서 정의되어 있을 때, 이 함수의 치역 중에서 가장 큰 값을 이 함수의 **최대값**, 가장 작은 값을 이 함수의 **최소값**이라고 한다.

형 성 평 가

어떤 공을 지면에서 초속 40m로 똑바로 위로 쏘아올렸을 때, t초 후의 이 공의 위치 ym는

$$y=-5t^2+40t$$

라고 한다. 다음 물음에 답하여라.

1. 이 공이 도달하는 최고 높이는 몇 m인가?

2. 이 공은 몇 초 후에 땅에 떨어지는가?

3. 공을 던진 후 3초에서 6초 사이에 공의 위치가 가장 낮은 경우는 지상에서 몇 m 위에 있는가?

<**해설**>

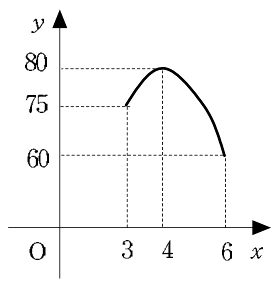
1. $y=-5t^2+40t=-5(t-4)^2+80$이므로
y는 $t=4$일 때 최대값 80을 갖는다.
따라서, 공이 도달하는 최고 높이는 80m이다.

2. 공이 땅에 떨어지는 경우는 높이가 0일 때이므로

$$0=-5t^2+40t$$

이 식을 풀면 $t=0$ 또는 $t=8$
따라서, 공은 8초 후에 땅에 떨어진다.

3. 3초 후의 공의 위치는 $y=-5\times3^2+40\times3=75$
4초 후의 공의 위치는 $y=-5\times4^2+40\times4=80$
6초 후의 공의 위치는 $y=-5\times6^2+40\times6=60$
따라서, 3초에서 6초 사이에 이 공의 가장 낮은 위치는 6초 후의 위치로서 지상으로부터 60m 위에 있다.



(2) 이차함수의 그래프의 활용

탐 구 활 동

[과제1] 만족도 (교학사 10-나 지도서 182쪽, 박두일 외)

● 목표 : 실생활 문제를 이차함수를 활용하여 해결할 수 있다는 것을 알도록 한다.

대희는 6만원을 모두 써서 음악 CD를 x개, 소설책을 y권 샀다.
이 때, 대희의 만족도를 E라 하면 $E=2xy$로 나타낼 수 있다고 한다. 음악 CD 한 개의 가격을 7500원, 소설책 한 권의 가격을 5000원이라 할 때, 만족도 E를 최대가 되게 하는 x, y의 값을 구하여라. (그래프그리미)

<해설>

7500원짜리의 음악 CD x개의 가격은 $7500x$원, 5000원짜리의 소설책 y권의 가격은 $5000y$원이고, 둘을 합쳐서 60000원이므로 $7500x+5000y=60000$

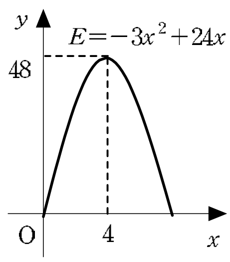
$\therefore 3x+2y=24$ ... ① 만족도 $E=2xy$ ⋯ ②

①에서 $2y=24-3x$를 ②에 대입하면

$E=2xy=x(24-3x)$

$=-3x^2+24x$(단, $0<x<8$) ⋯ ③

③을 그래프로 그리면 오른쪽 그림과 같이 되어 $x=4$일 때, E는 최대가 된다. 따라서, ①에 의해 E가 최대가 되는 것은 $x=4, y=6$일 때이다.

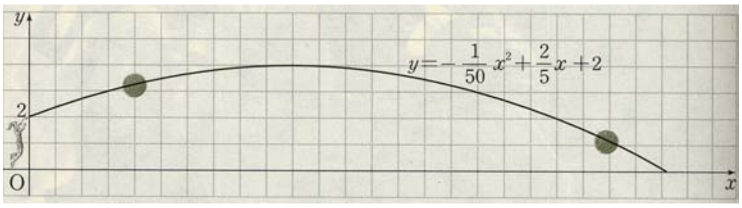


[과제2] 농구공의 자취 (지학사 10-나 지도서 208쪽, 이강섭 외)

● 목표 : 농구경기에서 나타나는 여러 상황을 이차함수를 이용하여 설명할 수 있다.

농구선수 A가 경기 중 $2m$의 높이에서 자기 팀 선수 B에게 패스한 공의 자취는 이차함수의 그래프 모양이다. 이 때, 선수 A로부터 공까지의 수평거리를 xm, 바닥으로부터 공까지의 높이를 ym라고 하면

$y=-\frac{1}{50}x^2+\frac{2}{5}x+2$인 관계가 성립한다고 한다.



1. 수평거리가 5m일 때, 공의 높이를 구하여 보자.

2. 공이 가장 높이 올라갔을 때의 높이를 구하여 보자.

3. 패스한 후 공이 2m의 높이에 있을 때, 상대팀 선수가 가로채기를 하였다. 이 때, 선수 A로부터 가로채기를 한 상대팀 선수까지의 거리를 구하여 보자.

4. 선수 B가 공을 잡지 못하고 공이 그대로 바닥에 떨어질 때, 선수 A로부터 공이 떨어진 지점까지의 수평거리를 구하여 보자.

5. 그래프그리미를 이용하여 위의 내용을 확인하여 보아라.

<해설>

1. $x=5$일 때, y값을 구하면 되므로

$$y=-\frac{1}{50}\times 25+\frac{2}{5}\times 5+2=\frac{7}{2}\,(\mathrm{m})$$

2. 주어진 이차함수의 식을 변형하여 꼭지점의 y좌표를 구하면 된다. 즉,

$$y=-\frac{1}{50}(x^2-20x+100-100)+2$$
$$=-\frac{1}{50}(x-10)^2+4$$

따라서, 가장 높이 올라갔을 때의 높이는 4m이다.

3. $y=2$에서

$$-\frac{1}{50}x^2+\frac{2}{5}x+2=2$$
$$-\frac{1}{50}x^2+\frac{2}{5}x=0, \qquad x^2-20x=0$$
$$x(x-20)=0 \qquad \therefore x=0,\ 20$$

따라서, 선수 A로부터 가로채기한 상대 선수까지의 거리는 20m이다.

4. 공이 바닥에 떨어질 때, 공의 높이는 0m이므로

$$-\frac{1}{50}x^2+\frac{2}{5}x+2=0\text{에서}$$

$$x^2-20x-100=0$$

$$\therefore x=10+10\sqrt{2}\ (\because\ x>0)$$

따라서, 수평거리는 $10+10\sqrt{2}$(m)이다.

5. 그래프를 그려 확인하여 본다.

[과제3] 혈압 (대한교과서 10-나 지도서 200쪽, 박윤범 외)

- 목표 : 혈압이라는 생활의 소재를 활용하여 그것이 나타내는 두 함수의 그래프를 그리고, 그 둘을 비교하여 말할 수 있다.

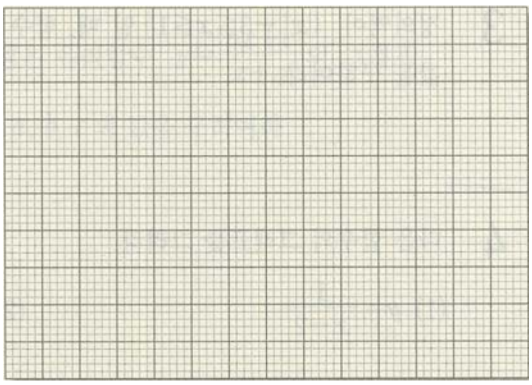
사람의 혈압은 나이와 성별뿐만 아니라 몸의 건강 상태 등에 따라 조금씩 다르다고 한다. 그리고 각 사람의 혈압은 최고 혈압과 최저 혈압으로 구분하고 있는데, 심장의 수축기와 이완기에 각각 최고와 최저로 나타낸다.

남자와 여자의 나이 x에 따른 평균적인 최고 혈압이 각각 아래와 같다고 할 때, 다음 물음에 답하여라.

남자의 최고혈압 평균: $f(x)=0.006x^2-0.02x+120$

여자의 최고혈압 평균: $g(x)=0.01x^2+0.05x+107$

1. $y=f(x)$와 $y=g(x)$를 그래프그리미를 이용하여 그리고, 두 그래프의 차이점을 설명해 보아라.

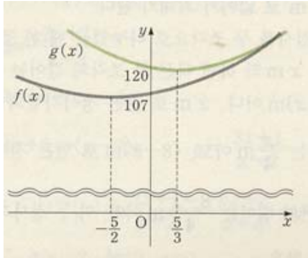


2. 각자 자신의 나이에 해당되는 평균 혈압을 위의 공식을 통해 알아보고, 실제 자신의 혈압과 비교해 보아라.(공학용계산기)

3. 평균적으로 여자의 혈압이 남자의 혈압보다 높아지는 것은 대략 언제부터인지 구하고, 그래프에서 x의 값을 움직여 확인하여 보아라. (공학용계산기)

4. 인터넷에서 건강과 관련된 함수식의 예를 찾아 보아라.

＜해설＞



1. $f(x)=0.006x^2-0.02x+120$

$$=0.006\left\{x^2-\frac{10}{3}x+(\frac{5}{3})^2\right\}-\frac{1}{60}+120$$

$$=0.006\left(x-\frac{5}{3}\right)^2+\frac{7199}{60}$$

$g(x)=0.01x^2+0.05x+107$

$$=0.01\left\{x^2+5x+\left(\frac{5}{2}\right)^2\right\}-\frac{1}{16}+107=0.01\left(x+\frac{5}{2}\right)^2+\frac{1711}{16}$$

2. 17세 고등학교 1학년 남학생

$f(17)=0.006\times(17)^2-0.02\times(17)+120$

$=0.006\times289-0.02\times17+120=121.394$

17세 고등학교 1학년 여학생

$g(17)=0.01\times(17)^2-0.05\times(17)+107$

$=0.01\times289+0.05\times17+107=2.89+0.85+107$

$=110.74$

3. $g(x)>f(x)$이어야하므로

$0.01x^2+0.05x+107>0.006x^2-0.02x+120$

$0.004x^2+0.07x-13>0, 0.4x^2+7x-1300>0,\ 2x^2+35x-6500>0$

$x<\frac{-35-\sqrt{53225}}{4}$ 또는 $x>\frac{-35+\sqrt{53225}}{4}\fallingdotseq\frac{-35+230.7}{4}\fallingdotseq48.9$

따라서, 대략 49세 이후부터 여자의 혈압이 더 높다.

[과제4] 스카이 다이빙 (대한교과서 10-나 지도서 182쪽, 박윤범 외)

- 목표 : 스카이 다이버의 낙하운동을 이차함수를 이용하여 설명할 수 있다.

스카이 다이빙은 비행기에서 자유낙하를 하는 동안 공중 대형을 만들다가 일정한 높이에서 낙하산을 펴고 지정된 지상에 착지하는 항공 스포츠이다.

지상 am인 위치에서 자유 낙하하는 물체의 t초 후의 높이 hm는

$$h=a-\frac{1}{2}gt^2(단,\ g=9.8\ \mathrm{m/s^2})$$

의 관계가 있다.

지상 3000m 상공의 비행기에서 뛰어내린 어떤 스카이 다이버가 지상 1040m에서 낙하산을 펼쳤다. 낙하산을 펼치기 전까지는 자유 낙하한다고 할 때, 다음 물음에 답하여라.

1. 이 스카이 다이버는 비행기에서 몇 초 후에 낙하산을 펼쳤는가?

2. 이 스카이 다이버가 비행기에서 뛰어내린 후, 낙하산을 펼치기 전까지의 시간에 따른 높이의 변화를 그래프를 써서 나타내어라. (그래프그리미)

<해설>

1. 지상 1040m에서 낙하산을 펼치므로

$$1040=3000-\frac{1}{2}\times 9.8\times t^2$$

∴ $t=\pm 20$

그런데, $t>0$이므로 $t=20$(초)이다.

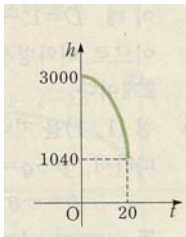
따라서, 이 비행기에서 뛰어내린 후 20초만에 낙하산을 펼쳤다.

2. 스카이 다이버가 비행기에서 뛰어내린 후 20초가 되는 1040m지점에서 낙하산을 펼쳤으므로

$0<t<20,\ 1040<h<3000$이다.

∴ $h=3000-\frac{1}{2}\times 9.8\times t^2=3000-4.9t^2$

이고 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



개 념 정 리

이차함수의 그래프의 활용

실생활에서 이차함수로 표현되는 관계를 이차함수의 그래프를 이용하여 해결할 수 있다.

형 성 평 가

1. 길이가 4πm인 끈을 잘라 두 개의 원을 만들 때, 두 원의 넓이의 합의 최소값을 구하여라.

<풀이>

1. 두 원의 반지름의 길이를 각각 r_1, r_2라 하면

$2\pi r_1 + 2\pi r_2 = 4\pi$ 에서

넓이의 합은

$$\begin{aligned}\pi r_1^2 + \pi r_2^2 &= \pi r_1^2 + \pi(2 - r_1)^2 \\ &= 2\pi(r_1 - 1)^2 + 2\pi\end{aligned}$$

따라서, $r_1 = r_2 = 1$ 일 때, 최소값은 $2\pi(\ \mathrm{m}^2)$이다.