Ⅳ. 합성함수와 역함수

1. 합성함수
2. 역함수

1 합성함수

학습목표

- 함수의 합성을 이해한다.
- 두 함수의 합성함수를 구할 수 있다.

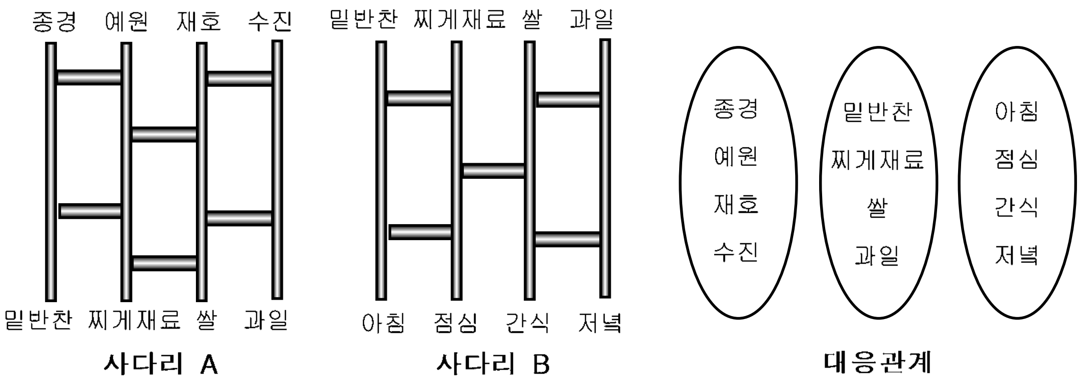
(1) 합성함수의 뜻

탐 구 활 동

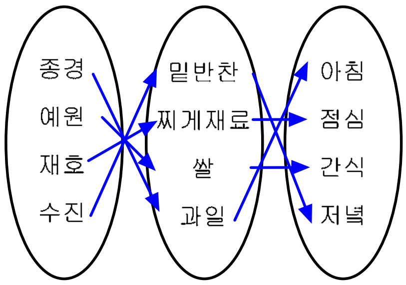
[과제1] 합성함수의 의미 (고려출판 10-나 지도서 164쪽, 최상기 외)

- 목표 : 함수의 합성은 두 대응을 연결하여 새로운 대응관계를 생각해 보는 것이다. 본 탐구활동에서는 학생들이 많이 접하는 사다리타기를 이용하여 함수의 합성의 의미를 탐구한다.

학교 동아리에서 청소년 수련장으로 야영을 가는데 종경, 예원, 재호, 수진이는 같은 조가 되었다. 준비물에 따라 식사 당번을 정하기 위해 아래 두 사다리 A, B로 이어갈 때, 종경이는 아침식사 당번이 된다. 나머지 학생들은 언제 식사 당번이 되는지 대응관계를 완성하여라.

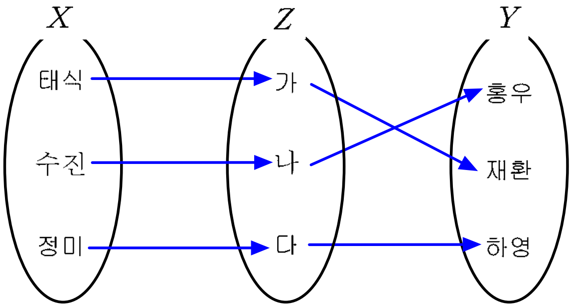


<해설>



[과제2] 합성함수의 이해 (교학사 10-나 지도서 167쪽, 박규홍 외)

- 목표 : 우리의 생활 주변에서 적절한 소재를 찾아 탐구함으로써 합성함수의 뜻을 이해한다.

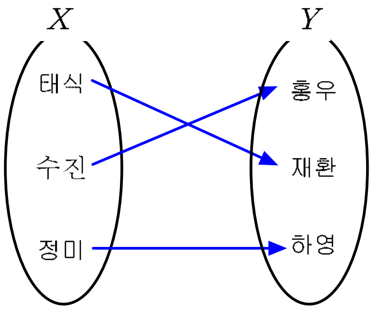
X 마을에 사는 태식, 수진 정미가 Z 지점에 있는 가, 나, 다 3개의 다리를 건너 Y 마을에 사는 친구인 홍우, 재환, 하영이의 집을 방문하는 경우에 다음을 알아보자.  1. 한 사람이 다리 하나만 통과한다고 하면 X 마을에서 Z 지점의 다리로 가는 것은 함수가 되겠는가? 2. Z 지점의 다리에서 Y마을로 한 사람이 가는 것은 함수가 되겠는가? 3. X 마을에서 Z 지점의 다리를 건너 Y 마을로 가는 것을 X 마을에서 Y 마을로 가는 것이라 생각할 때, 이것도 함수가 되겠는가?

<해설>

1. X={태식, 수진, 정아}, Z={가, 나, 다}라 하고, X 마을에서 Z의 다리로 가는 것을 두 집합 X와 Z의 대응 f라 하면 X의 각 원소는 Z의 오직 한 원소에만 대응하므로 $f: X \to Z$는 함수이다.

2. Y={홍우, 재환, 하영}이라 하고 Z 지점의 다리에서 Y마을로 가는 것을 두 집합 Z와 Y의 대응 g라 하면 Z의 각 원소는 Y의 오직 한 원소에만 대응하므로 $g: Z \to Y$는 함수이다.

3. X마을에서 Y마을로 가는 것이라 생각하면 대응은 오른쪽 그림과 같이 되고 X의 각 원소는 Y의 오직 한 원소에만 대응하므로 함수가 된다.



※참고 : 이와 같이 우리 주변에는 두 함수 사이의 합성으로 이루어진 것들이 무수히 많이 있다. 예를 들면 우리가 영화를 본다고 할 때, 두 함수를 '카메라 함수 : 실물 →필름', '영사기 함수 : 필름 → 화면'이라 하면 '영화 함수 : 실물 → 화면'는 카메라 함수와 영사기 함수를 합성한 것이다.

[과제3] 합성함수 구하기 (중앙교육진흥연구소 10-나 지도서 167쪽, 최봉대 외)

- 목표 : 이 탐구 활동은 $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$에서 X에서 Z로의 직접적인 대응이 f와 g의 합성함수임을 이해한다.
  s를 x의 함수로 나타내고, y를 s의 함수식으로 나타낸 후에 y를 x의 함수식으로 나타낼 수 있다.

태양 에너지는 대표적인 대체 에너지원으로 태양 전지판을 사용하여 전기 에너지를 얻는다. 어떤 태양 전지판이 $1\,\mathrm{m}^2$에 $1000\,W$의 태양 에너지를 흡수하고, 이 중 12%를 전기 에너지로 바꿀 수 있다고 할 때, 다음 물음에 답하여 보자.  1. 태양 전지판의 넓이를 $x\mathrm{m}^2$라고 하고, 이 태양 전지판에 흡수되는 총 태양 에너지를 sW라고 할 때, s를 x의 함수식으로 나타내어라.

2. 태양 전지판이 발생시킬 수 있는 전기 에너지를 yW라고 할 때, y를 s의 함수식으로 나타내어라.

3. 위의 1, 2에서 얻은 두 식을 사용하여 y를 x의 함수식으로 나타내어라.

4. 태양 전지판의 넓이가 $10\,\mathrm{m}^2$일 때, 발생하는 전기 에너지는 몇 W인가?

<해설>

1. 태양 전지판이 $1\,\mathrm{m}^2$에 1000W의 태양 에너지를 흡수하므로 태양 전지판의 넓이가 $x\ \mathrm{m}^2$이면 이 전지판이 흡수하는 총 태양 에너지(sW)는 $1000x$ W이다.
   $\therefore\ s=1000x$

2. 전지판이 흡수하는 태양 에너지의 12%가 전기 에너지 (yW)로 바뀌므로 $y=0.12s$

3. $y=0.12s=0.12\times1000x=120x$
   $\therefore\ y=120x$

4. $y=120x$에서 $x=10$을 대입하면 $y=1200$

개 념 정 리

합성함수의 뜻

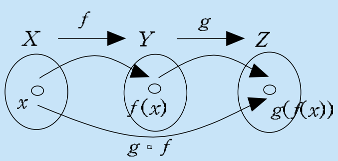
(1) 합성함수의 뜻

두 함수 $f: X\to Y$, $g: Y\to Z$에 대하여 함수 $g\circ f: X\to Z$를 f와 g의 **합성함수**라 한다.

(2) 합성함수 구하기

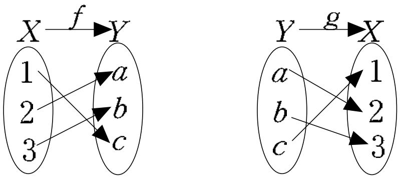
두 함수 $f: X\to Y$, $y=f(x)$ 와 $g: Y\to Z$, $z=g(y)$
의 합성함수는 다음과 같다.

$g\circ f: X\to Z$, $(g\circ f)(x)=g(f(x))$



형 성 평 가

1. 아래와 같은 두 함수 $f: X \to Y$, $g: Y \to X$ 에 대하여 다음 물음에 답하여라.



(1) 합성함수 $g \circ f: X \to X$ 의 대응관계를 그림으로 나타내어라.

(2) $(g \circ f)(1)$ 의 값을 구하여라.

(3) $(g \circ f)(x) = 3$ 을 만족하는 x 의 값을 구하여라.

2. 두 함수 $f(x) = x+1$, $g(x) = x^2$ 에 대하여 다음을 구하여라.

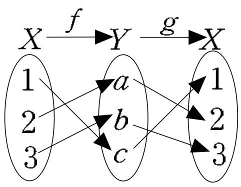
(1) $(g \circ f)(-1)$

(2) $(f \circ g)(3)$

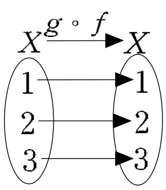
3. 함수 $f(x) = 3x-1$, $g(x) = x^2+5$ 에 대하여 합성함수 $(g \circ f)(x)$를 구하여라.

<풀이>

1. (1) <그림1>을 정리하면 <그림2>를 얻을 수 있다.



<그림1>



<그림2>

(2) $(g \circ f)(1) = 1$

(3) $(g \circ f)(3) = 3 \quad \therefore\ x = 3$

2. (1) $(g \circ f)(-1) = g(f(-1)) = g(0) = 0$

(2) $(f \circ g)(3) = f(g(3)) = f(9) = 10$

3. $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x-1) = (3x-1)^2 + 5 = 9x^2 - 6x + 6$

(2) 합성함수의 성질

탐 구 활 동

[과제1] 합성함수의 성질 이해하기 (금성출판사 10-나 지도서 148쪽, 양승갑 외)

- 목표 : 생활 주변이나 구체적인 사실을 소재로 하여 합성함수의 기본적인 성질을 이해한다.

어느 옷가게에서 옷을 팔 때 1000원을 깎아주고 20%도 할인하여 주겠다고 손님에게 제안하였다. 옷값을 먼저 깎은 후 할인한 가격과 먼저 할인한 후 깎아 준 가격 중에서 싼 가격을 손님이 선택한다고 한다. 1. 가격이 x원인 옷을 1000원 깎아 준 옷값을 $f(x)$, 20% 할인한 옷값을 $g(x)$라 할 때, $f(x)$와 $g(x)$를 각각 x의 식으로 나타내어라. 2. 옷값을 먼저 깎아주고 할인한 가격인 $g(f(x))$원과 먼저 할인하고 깎아준 가격인 $f(g(x))$원을 각각 구하여라. 3. 어떤 방법으로 옷값을 치르는 것이 손님에게 더 저렴한가?

<해설>

1. $f(x)=x-1000$,
   $g(x)=x-0.2x=0.8x$

2. $g(f(x))=g(x-1000)=0.8x-800$
   $f(g(x))=f(0.8x)=0.8x-1000$

3. $f(g(x))$와 $g(f(x))$의 두 옷값을 비교해보면
   $f(g(x))-g(f(x))=-200$
   이므로 먼저 할인하고 깎아준 가격이 항상 200원 더 싸다.

[과제2] 합성함수의 성질 이해하기 (지학사 10-나 지도서 191쪽, 이강섭 외)

네 개의 100원짜리 동전을 오른쪽 그림과 같이 일렬로 나열한 후 세 함수 f, g, h를 다음과 같이 정의하자.

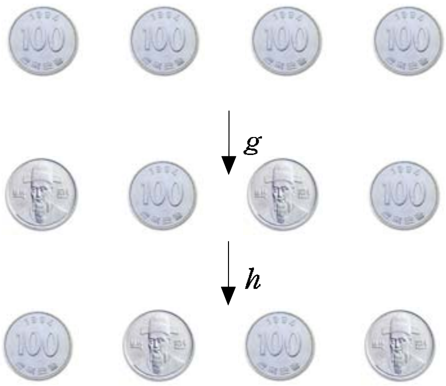
$f=$(짝수 번째 동전을 뒤집는다.)

$g=$(홀수 번째 동전을 뒤집는다.)

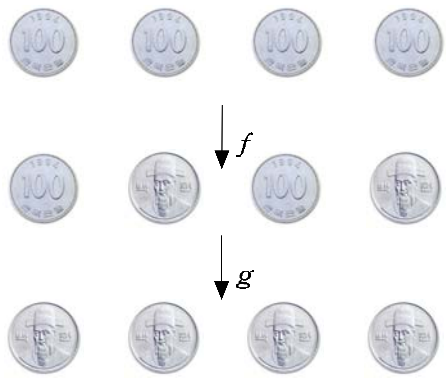
$h=$(모든 동전을 뒤집는다.)

이 때, $(h\circ g)\circ f$와 $h\circ(g\circ f)$에 의한 결과를 비교하여라.

<해설>

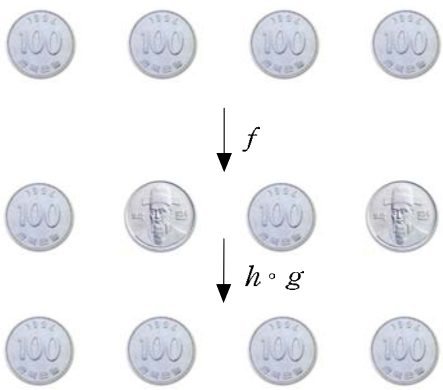


$h\circ g$

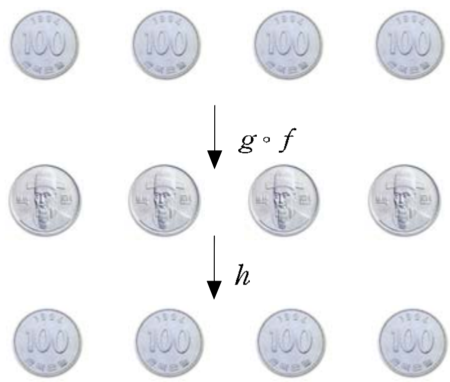


$g\circ f$

따라서,



$(h\circ g)\circ f$



$h\circ(g\circ f)$

이 때, $(h\circ g)\circ f$와 $h\circ(g\circ f)$에 의한 결과는 서로 같고, $(h\circ g)\circ f=h\circ(g\circ f)$

개 념 정 리

합성함수의 성질

(1) 교환법칙

두 함수 f, g 에 대하여 $g \circ f \neq f \circ g$ 이다.

(2) 결합법칙

세 함수 f, g, h에 대하여 $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$이 성립한다.

형 성 평 가

1. 두 함수 $f(x) = x-1$, $g(x) = 2x$에 대하여 합성함수 $(g \circ f)(x)$, $(f \circ g)(x)$를 각각 구하고, 이 두 함수는 서로 같은지 조사하여라.

2. 세 함수 $f(x) = x+1$, $g(x) = x^2$, $h(x) = -x$에 대하여 다음을 구하여라.

(1) $((f \circ g) \circ h)(1)$ (2) $(f \circ (g \circ h))(1)$

3. 세 함수 $f(x) = x-1$, $g(x) = 2x$, $h(x) = -x$에 대하여
합성함수 $((f \circ g) \circ h)(x)$, $(f \circ (g \circ h))(x)$를 각각 구하고, 이 두 함수는 서로 같은지 조사하여라.

4. 노인을 모시고 식사를 할 경우 음식값을 할인해 주는 한정식집이 두 곳 있다. A 한정식집에서는 노인과 함께 식사할 경우 20%를 할인해 주며, 그 할인된 음식값에 대하여 5%의 봉사료를 받는다. 또, B 한정식집에서는 음식값의 7%를 봉사료로 받으며, 봉사료를 포함한 전체 금액의 25%를 할인해 준다. 다음 물음에 답하여라.

(1) A 한정식집의 원래 음식값 x와 20%를 할인한 후 5%의 봉사료를 포함시킨 음식값 y 사이의 함수식을 구하여라.

(2) B 한정식집의 원래 음식값 x와 7%의 봉사료를 부과한 후 25%를 할인한 음식값 y 사이의 함수식을 구하여라.

(3) 원래 음식값을 기준으로 동일한 금액의 식사를 하였을 때, 최종적으로 지불하는 금액은 어느 한정식집이 더 저렴한가?

(대한교과서 10-나 지도서 179쪽, 우정호 외)

<풀이>

1. $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x-1)=2x-2$

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(2x)=2x-1$

따라서, $g\circ f\neq f\circ g$

2. (1) $((f\circ g)\circ h)(1)=(f\circ g)(h(1))=(f\circ g)(-1)=2$

(2) $(f\circ(g\circ h))(1)=f((g\circ h)(1))=f(1)=2$

3. $((f\circ g)\circ h)(x)=(f\circ g)(h(x))=(f\circ g)(-x)=-2x-1$

$(f\circ(g\circ h))(x)=f((g\circ h)(x))=f(-2x)=-2x-1$

따라서, $(f\circ g)\circ h=f\circ(g\circ h)$

4. (1) $x \xrightarrow{20\%\ \text{할인}} 0.8x$

$\xrightarrow{5\%\ \text{봉사료}} 0.8x+0.8x\times 0.05$

$\therefore\ y=0.8x+0.04x=0.84x$

(2) $x \xrightarrow{7\%\ \text{봉사료}} x+0.07x$

$\xrightarrow{25\%\ \text{할인}} 1.07x\times 0.75$

$\therefore\ y=1.07x\times 0.75=0.8025x$

(3) (1), (2)에 의해 동일한 금액의 식사를 한 후 최종적으로 지불하는 금액은 B 한정식집이 더 저렴하다.

2	역함수

학습목표

- 역함수의 뜻을 이해하고 역함수를 구할 수 있다.
- 역함수의 그래프의 특징을 이해한다.

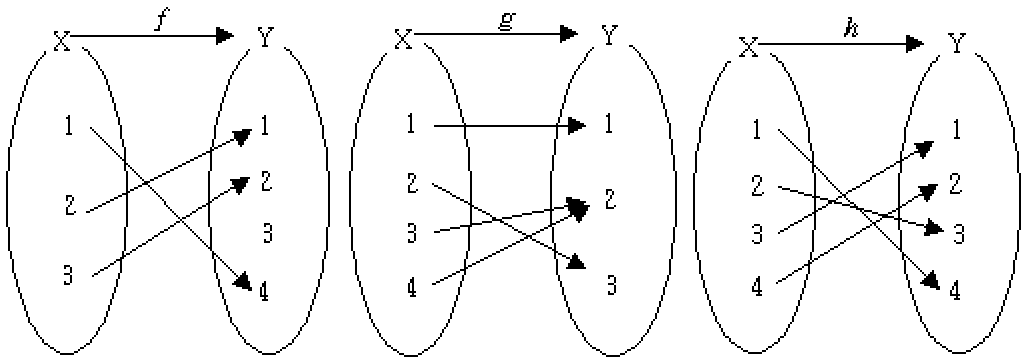
(1) 역함수의 뜻

탐 구 활 동

[과제1] 역함수의 의미

- 목표 : 벤 다이어그램을 이용하여 주어진 함수가 일대일 대응일 때, 정의역과 공역이 바뀌어도 그 대응이 함수가 될 수 있음을 직관적으로 알 수 있다.

다음 X에서 Y로의 함수 f, g. h에 대하여 다음을 알아보자.



1. 각 함수에 대하여 X에서 Y로의 대응을 말하여 보아라.

2. X에서 Y로의 함수 f, g, h중에서 일대일 대응인 함수를 찾아보아라.

3. X에서 Y로의 대응을 Y에서 X로의 대응으로 바꾸었을 때, 그 대응이 함수가 될 수 있는 것을 찾아보아라.

<해설>

1. ① 함수 f는 정의역의 서로 다른 원소가 공역의 서로 다른 원소와 대응하고 있지만 공역과 치역이 일치하지 않는다.

② 함수 g는 공역과 치역은 서로 일치하지만
정의역의 서로 다른 두 원소 3, 4가 공역의 한 원소 2와 대응하고 있다.

③ 함수 h는 정의역의 서로 다른 원소가 공역의 서로 다른 원소와 대응하고 있으며 공역과 치역이 일치한다.

2. 일대일 대응은 정의역의 서로 다른 원소가 공역의 서로 다른 원소와 대응해야 하고 공역과 치역이 서로 같아야 한다. 따라서 일대일 대응인 함수는 h이다.

3. Y에서 X로의 대응으로 바꾸었을 때, 그 대응이 함수가 될 수 있는 것은 일대일 대응인 함수 h밖에 없다. 이는 벤 다이어그램을 이용하면 쉽게 이해할 수 있다.

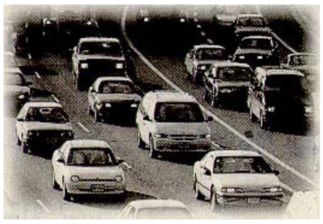
[과제2] 역함수를 구하는 과정

- 목표 : y가 x에 대한 식으로 표현되어 있을 때, 반대로 x를 y에 대한 식으로 나타내는 것이 역함수를 구하는 과정임을 이해한다.

<활동1> (두산 10-나 지도서 202쪽, 임재훈 외)

고속도로의 기점으로부터 20 km지점에서 출발하여 시속 100 km의 일정한 속력으로 달리는 자동차가 있다.

1. x시간 후 자동차는 기점으로부터 몇km 지점에 있는가를 x에 대한 식으로 나타내어라.
2. 기점으로부터 $y$km의 위치에 있을 때에는 출발 후 몇 시간이 경과하였는가를 y에 대한 식으로 나타내어라.



<해설>

1. x시간 동안 달린 거리는 $100x$(km)이므로, x시간 후 자동차는 기점으로부터 $(100x+20)$(km) 지점에 있다.
2. x시간 후 기점으로부터 $y$km 지점에 있다면, $y=100x+20$

   x를 y로 나타내면 $x=\frac{1}{100}(y-20)$

   이므로 출발 후 $\frac{1}{100}(y-20)$ 시간이 경과한 것이다.

<활동2> (천재교육 10-나 지도서 197쪽, 신현성 외)

수경이는 길이가 30 cm 인 양초에 불을 붙여 매분마다 양초가 타 들어가는 길이를 재었더니 양초가 매분 0.25 cm 씩 타 들어가고 있음을 알았다.

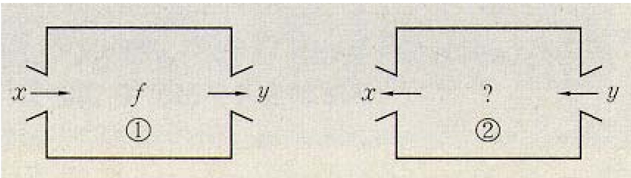
이 때, x분 동안 양초가 타 들어가고 남은 길이를 $y$cm라 두고 x, y의 관계식을 다음과 같이 구하였다. 아래 물음에 답하여라.

$$y=30-0.25x \quad \cdots\cdots ①$$

1. ①에서 x를 y에 관한 식으로 정리하여 나타내어라.

$$x=\boxed{} \quad \cdots\cdots ②$$

2. 다음 그림에서 ②는 함수라고 할 수 있는가? 이유를 말하여라.



3. 초의 길이에 따른 시간의 경과 정도 사이에는 함수의 관계가 있다고 말할 수 있는가?

<해설>

1. $y=30-0.25x$에서 $y=30-\frac{1}{4}x$

$\therefore \frac{1}{4}x=30-y,\ x=-4y+120 \quad \cdots\cdots ②$

2. ②는 y의 값에 대하여 x의 값이 하나씩 대응되므로 함수이다.
3. x를 y에 관하여 정리한 식 $x=-4y+120$에 의하여 초의 길이 y에 따른 경과시간 x사이에는 함수 관계가 있다.

개념정리

역함수의 뜻

(1) 역함수의 뜻

함수 $f: X \to Y$, $y=f(x)$가 일대일 대응일 때, Y의 원소 y에 $f(x)=y$인 X의 원소 x를 대응시키는 Y에서 X로의 함수를 f의 역함수라 하고 $f^{-1}: Y \to X$, $y=f^{-1}(x)$로 나타낸다.

(2) 역함수를 구하는 방법

① x와 y를 서로 바꾸어 놓는다.

② $x=f(y)$를 y에 대하여 풀어 $y=f(x)$의 꼴로 나타낸다.

③ 주어진 함수의 치역을 역함수의 정의역으로 한다.

형 성 평 가

1. 집합 $X=\{1, 2, 3\}$, $Y=\{3, 5, 7\}$ 에 대하여 함수 $f: X\to Y$를 $f(x)=2x+1$ 로 정의할 때, 다음 물음에 답하여라.

(1) f의 역함수 f^{-1} 의 정의역을 구하여라.

(2) f의 역함수 f^{-1} 의 치역을 구하여라.

(3) $f^{-1}(3)$, $f^{-1}(5)$, $f^{-1}(7)$ 을 차례로 구하여라.

2. 함수 $y=\frac{3}{2}x+1$ 의 역함수를 구하여라.

<풀이>

1. (1) f^{-1} 의 정의역은 $Y=\{3, 5, 7\}$

(2) f^{-1} 의 치역은 $X=\{1, 2, 3\}$

(3) $f(1)=3$, $f(2)=5$, $f(3)=7$ 이므로

$f^{-1}(3)=1$, $f^{-1}(5)=2$, $f^{-1}(7)=3$

2. 함수 $y=\frac{3}{2}x+1$ 은 실수 전체의 집합 R에서 R로의 일대일 대응이므로 역함수가 존재한다. $y=\frac{3}{2}x+1$ 을 x에 대하여 풀면 $x=\frac{2}{3}y-\frac{2}{3}$ 가 된다.

여기서 x와 y를 바꾸면 역함수가 된다.

$\therefore\ y=\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}$

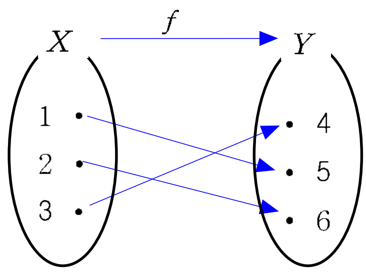
(2) 역함수의 성질

탐 구 활 동

[과제1] 역함수의 성질 이해하기 (금성출판사 지도서 142쪽 , 양승갑 외)

● 목표 : 주어진 벤 다이어그램을 보고 함수값을 써 넣는 과정을 통하여 역함수의 성질을 자연스럽게 이해할 수 있도록 한다.

오른쪽 그림과 같은 함수 f가 있다. $\boxed{\quad}$ 안에 알맞은 수를 써 넣어 보자.



1. $(f^{-1} \circ f)(1) = f^{-1}(f(1)) = f^{-1}(\boxed{\quad}) = \boxed{\quad}$

   $(f^{-1} \circ f)(2) = f^{-1}(f(2)) = f^{-1}(\boxed{\quad}) = \boxed{\quad}$

   $(f^{-1} \circ f)(3) = f^{-1}(f(3)) = f^{-1}(\boxed{\quad}) = \boxed{\quad}$

2. $(f \circ f^{-1})(4) = f(f^{-1}(4)) = f(\boxed{\quad}) = \boxed{\quad}$

   $(f \circ f^{-1})(5) = f(f^{-1}(5)) = f(\boxed{\quad}) = \boxed{\quad}$

   $(f \circ f^{-1})(6) = f(f^{-1}(6)) = f(\boxed{\quad}) = \boxed{\quad}$

<해설>

1. $(f^{-1} \circ f)(1) = f^{-1}(f(1)) = f^{-1}(\boxed{5}) = \boxed{1}$

   $(f^{-1} \circ f)(2) = f^{-1}(f(2)) = f^{-1}(\boxed{6}) = \boxed{2}$

   $(f^{-1} \circ f)(3) = f^{-1}(f(3)) = f^{-1}(\boxed{4}) = \boxed{3}$

2. $(f \circ f^{-1})(4) = f(f^{-1}(4)) = f(\boxed{3}) = \boxed{4}$

   $(f \circ f^{-1})(5) = f(f^{-1}(5)) = f(\boxed{1}) = \boxed{5}$

   $(f \circ f^{-1})(6) = f(f^{-1}(6)) = f(\boxed{2}) = \boxed{6}$

개념정리

역함수의 성질

함수 $f: X \rightarrow Y$, $y = f(x)$ 가 일대일 대응이면 역함수 f^{-1}가 존재한다.

① $f^{-1}(a) = b \Leftrightarrow f(b) = a$

②항등함수 i에 대하여 $f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = i$

③ $(f^{-1})^{-1} = f$

④ $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$

형 성 평 가

1. 함수 $f(x) = -2x+3$ 에 대하여 $f^{-1}(a) = 4$ 일 때, 상수 a의 값을 구하여라.

2. 함수 $f(x) = -2x+6$, $g(x) = x-2$ 일 때, 다음 물음에 답하여라.
(1) $f^{-1}(x)$, $g^{-1}(x)$를 각각 구하여라.
(2) $f^{-1} \circ f = I$ 임을 확인하여라.
(3) $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$ 임을 확인하여라.

<풀이>

1. $f^{-1}(a) = 4$ 에서 $a = f(4)$
$f(x) = -2x+3$ 이므로, $f(4) = -5$
$\therefore\ a = -5$

2. (1) $y=-2x+6$을 x에 관하여 풀면 $x=-\frac{1}{2}y+3$

$\therefore\ f^{-1}(x)=-\frac{1}{2}x+3$

$y= x-2$ 를 x에 관하여 풀면 $x=y+2$
$\therefore\ g^{-1}(x)=x+2$

(2) $(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(-2x+6) = -\frac{1}{2}(-2x+6)+3 = x$

$\therefore\ f^{-1} \circ f = I$

(3) 합성함수 $f \circ g$를 구하면
$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x-2) = -2x+10$
따라서 $(f \circ g)^{-1}(x) = -\frac{1}{2}x+5$
$f^{-1}(x)=-\frac{1}{2}x+3$, $g^{-1}(x)=x+2$ 이므로
$(g^{-1} \circ f^{-1})(x) = g^{-1}(f^{-1}(x)) = g^{-1}\left(-\frac{1}{2}x+3\right) = -\frac{1}{2}x+5$
따라서 $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$

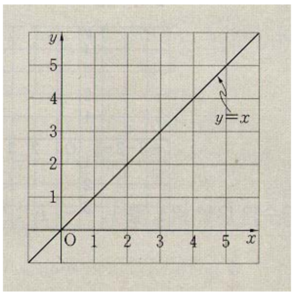
(3) 역함수의 그래프

탐 구 활 동

[과제1] 역함수의 그래프 그리기 (천재교육 지도서 199쪽, 신현성 외)

- 목표 : 좌표평면에서 직선 $y=x$에 대한 대칭이동으로 함수의 그래프와 그 역함수의 그래프의 관계를 발견할 수 있다.

오른쪽 좌표평면 위에 주어진 물음의 그래프를 나타내 보고, 역함수의 그래프는 어떠한 관계가 있는지 알아보자.



1. 오른쪽 좌표평면 위에 함수 $y=x^2\,(x\geqq 0)$ ……①
   의 그래프를 그려 보아라. (그래프그리미)
2. 함수 ①의 역함수 ②를 구하여 오른쪽 좌표평면 위에 나타내어 보아라.
3. 함수 $y=x$의 그래프를 그려 보아라
4. ①위의 점 (2, 4)를 직선 $y=x$에 대하여 대칭 이동하면 어느 위치에 있겠는가? 오른쪽 좌표평면 위에 나타내어 보아라.
   또, ①위의 다른 점들도 이와 같이 해 보아라.
5. 4의 결과로부터, 함수 ①과 그 역함수 ②의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 어떤 관계에 있는지 조사하여라.

<해설>

1. $y=x^2\,(x\geqq 0)$의 그래프를 그래프그리미로 그려볼 것(단, 정의역의 설정 : $x\geqq 0$)
2. $y=x^2\,(x\geqq 0)$을 x에 대하여 풀면 $x=\pm\sqrt{y}$
   그런데 $x\geqq 0$ 이므로 $x=\sqrt{y}$ 이고, x와 y를 바꾸면 구하는 역함수는 $y=\sqrt{x}$가 되므로 이 함수를 그래프그리미로 그려볼 것
3. 그래프그리미로 그려볼 것
4. ①위의 점 (2, 4)를 직선 $y=x$에 대하여 대칭 이동하면 ②위의 점 (4, 2)이다.
   ①위의 다른 점 (3, 9)를 직선 $y=x$에 대하여 대칭 이동하면 ②위의 점 (9, 3)이다.
5. ① 위의 모든 점을 직선 $y=x$에 대하여 대칭 이동하면 ② 위의 점이 된다. 따라서 ① 의 그래프와 ② 의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

개념정리

역함수의 그래프

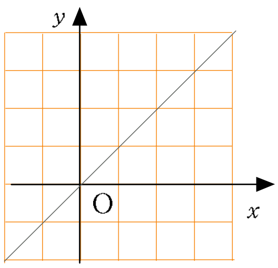
함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 역함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이다.

형성평가

1. 함수 $y=2x+3$ 의 그래프 위의 한 점 $A(0, 3)$ 을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점 B 의 좌표를 구하여라.

2. 직선 $y=2x+3$ 을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 직선의 식을 구하여라

3. 함수 $y=2x+3$ 과 그 역함수의 그래프를 그려라.



<풀이>

1. 점 (a, b) 를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점은 (b, a) 이다.

$\therefore\ B(3, 0)$

2. 직선 $y=2x+3$ 에서 x 와 y 를 서로 바꾸면

$x=2y+3 \qquad \therefore\ y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$

3. $y=2x+3$ 의 그래프를 그린 후 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭 이동하여 역함수의 그래프를 그린다.