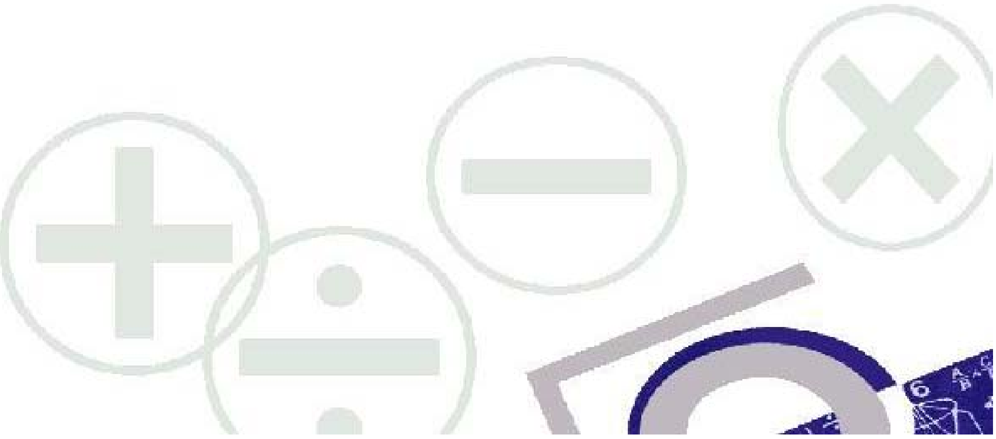
Ⅴ. 유리함수와 무리함수

1. 유리함수
2. 무리함수



1 유리함수

학습목표

- 유리함수의 뜻을 이해할 수 있다.
- 함수 $y=\frac{k}{x}$ $(k\neq0)$ 의 그래프를 바탕으로 여러 가지 유리함수의 그래프를 그릴 수 있다.

(1) 유리함수의 뜻

탐 구 활 동

[과제1] 자동차의 시간에 따른 가격 (천재교육 10-나 지도서 226쪽, 신현성 외)

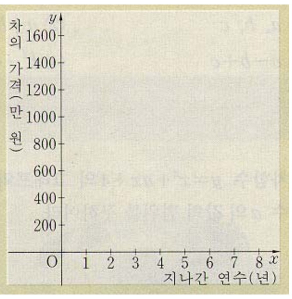
- 목표 : 유리함수의 도입이 필요한 현상을 생활 주변에서 찾아보고 분모에 미지수가 생기는 분수식으로 표시되는 형태의 유리함수의 필요성을 인식할 수 있다.

처음 차를 산 후 시간이 지나면 차의 가치(가격)는 떨어진다. 이 때, 차의 가치(가격) y와 처음 차를 산지 1년 후부터 처음 차를 산 후 지나간 기간 x년 사이에는 반비례 관계가 있다고 한다. 동철이 아버지는 어떤 자동차 회사로부터 최신 모델의 승용차를 샀는데 2년이 지난 후에 그 차의 가격은 800만원이었다.

1. 차의 가격 y와 차를 산 후 지나간 연수 x사이의 관계를 함수로 나타내어라.

2. 다음 표를 채우고 위의 함수를 그래프로 나타내어라.(그래프 그리미)
   (단, 표의 수는 천 원 단위에서 반올림하여라.)

지나간 연수 x	차의 가격 y
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	



3. 1.에서 구한 함수에 대하여 x의 값이 다음과 같을 때, y의 값을 구하여 다음 표를 채우고 x의 값이 음인 경우의 그래프를 생각해서 그려 보아라.(그래프그리미)

x	⋯	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1
y	⋯								

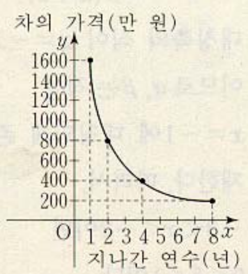
<해설>

1. 차의 가격 y(만원)과 차를 산 후 지나간 연수 x(년) 사이에는 반비례의 관계가 있으므로 $y=\frac{a}{x}$ (단, a는 상수)가 되고, 2년 후에 차의 가격이 800만원이므로

$800=\frac{a}{2}$에서 $a=1600$ $\quad\therefore\ y=\frac{1600}{x}$

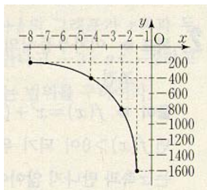
2. 위에서 구한 반비례식을 이용하여 표를 완성하고, 그래프를 그린다..

연수 x	가격 y
1	1600
2	800
3	533
4	400
5	320
6	267
7	229
8	200



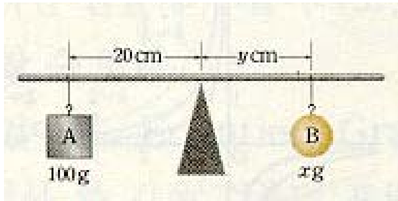
3. 함수 $y=\frac{1600}{x}$에서 x의 값을 차례로 대입하여 y의 값을 구한 후 이들 점 (x, y)를 지나는 그래프를 그리면 다음과 같다.

x	⋯	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1
y	⋯	-200	-229	-267	-320	-400	-533	-800	-1600



[과제2] 지렛대의 받침점과 물체의 무게 (중앙교육 10-나 지도서 195쪽, 최봉대 외)

● 목표 : 비례식의 관계를 통하여 유리함수의 뜻을 안다.



오른쪽 그림과 같이 지렛대의 받침점으로부터 20 cm 떨어진 지점에 100 g 의 물체 A 가 있다고 하자. A 의 반대쪽에 무게가 x g 인 물체 B 를 매달 때, 이 지렛대가 균형을 이루려면 물체 B 는 받침점으로부터 y cm 만큼 떨어진 지점에 있어야 한다고 한다. 이 때, x와 y 사이에는 비례식 $20 : y = x : 100$ 이 성립한다.
다음 물음에 답하여 보자.

1. y를 x의 식으로 나타내어라.

2. x와 y 사이에는 함수관계가 성립하는가?

3. 물체 B의 무게가 200 g 일 때, 물체 B 는 받침점으로부터 몇 cm 떨어져 있는가?

<해설>

1. $20 : y = x : 100$에서 $yx = 2000$

$$\therefore \; y = \frac{2000}{x}$$

2. x의 값이 결정되면 이에 따라 y의 값이 하나로 결정되므로 함수 관계가 성립한다.

3. $x = 200$이면 $y = \frac{2000}{200} = 10(\text{cm})$

개 념 정 리

유리함수의 뜻

함수 $y = f(x)$에서 $f(x)$가 x에 대한 분수식일 때 이 함수를 분수함수라고 하고, 다항함수와 분수함수를 통틀어 유리함수라고 한다.

형 성 평 가

1. 100 g 의 물에 x g 의 소금을 넣었을 때의 소금물의 농도를 y% 라고 할 때, 다음 물음에 답하여라.

(1) 이 때 소금물의 양은 모두 몇 g 인가?

(2) 소금물의 농도 y를 x에 관한 식으로 나타내어라.

(3) $x=10$ 일 때의 소금물의 농도를 구하여라.

2. 100 km 떨어져 있는 거리를 시속 x km 로 갈 때 걸리는 시간을 y시간이라고 한다. 이 때 다음 물음에 답하여라.

(1) 아래 표의 빈칸을 채워라.

시속 x km	1	2	5	10	20	50	100
y시간		50			5		

(2) 위의 표에서 x, y 사이의 관계식을 구하여라.

(3) y를 x에 대한 식으로 나타내어라.

(4) x와 y사이에는 어떤 함수관계가 성립한다고 말할 수 있는가를 진술하고, 이를 그래프로 그려 보아라. (그래프그리미)

(5) 속도 x가 시속 4 km 일 때, 이 거리를 가는데 걸리는 시간은?

<풀이>

1. (1) 소금물의 양은 (물의 양) + (소금의 양)이므로 $100+x$ (g) 이 된다.

(2) 소금물의 농도는 $y=\dfrac{x}{100+x}\times 100$ (%) 가 된다.

(3) $x=10$ 일 때 소금물의 농도 $y=\dfrac{100\times 10}{100+10}=\dfrac{100}{11}$ (%) 가 된다.

2. (1) 아래 표의 빈칸을 채우면 다음과 같다

시속 x km	1	2	5	10	20	50	100
y시간	100	50	20	10	5	2	1

(2) x, y사이의 관계식을 구하면 $xy=100$ 이 된다.

(3) y를 x에 대한 식으로 나타내면 $y=\dfrac{100}{x}$ 가 된다.

(4) 그래프그리미로 그려볼 것

(5) 시간 $y=\dfrac{100}{4}=25$ 시간이 된다.

(2) $y=\dfrac{k}{x}$ 의 그래프 (단, $k\neq 0$)

탐 구 활 동

[과제1] 파이프 오르간의 소리의 진동수 (대한교과서 10-나 지도서 197쪽, 우정호 외)

- 목표 : 파이프의 길이를 변화시키고 이에 따른 진동수의 변화를 관찰함으로써 파이프의 길이가 길어지면 진동수가 어떻게 변하는지 그 관계를 파악한다.

> 파이프 오르간이 내는 음의 높낮이는 파이프의 길이에 따라 달라진다. 소리의 초속이 약 $335\,\mathrm{m}$일 때, 파이프의 길이 $x\,\mathrm{m}$와 1초당 진동수 y의 관계는 $y=\dfrac{335}{2x}$ 와 같다.
> 예를 들어, 길이가 약 $2.4\,\mathrm{m}$인 파이프 오르간의 진동수는 대략 1초당 69회이며 이 음은 기준이 되는 '도'음보다 두 옥타브 낮은 소리이다. 다음 물음에 답하여라.
>
> 1. 길이가 $1\mathrm{m}$와 $3\mathrm{m}$인 파이프오르간의 진동수를 각각 구하여라.
>
> 2. 파이프 오르간에서 길이가 길어질수록 진동수는 어떻게 변하는가?
>
> 3. $y=\dfrac{335}{2x}$의 그래프를 그려 보아라. (그래프그리미)

<해설>

1. $x=1$일 때 $y=\dfrac{335}{2}=167.5$이므로 길이가 $1\mathrm{m}$인 파이프 오르간의 1초당 진동수는 약 168회이다.
   $x=3$일 때 $y=\dfrac{335}{6}=55.83\cdots$이므로 길이가 $3\mathrm{m}$인 파이프 오르간의 1초당 진동수는 약 56회이다.

2. 파이프의 길이가 길어질수록 진동수는 줄어든다.

3. 그래프그리미로 그려볼 것

[과제2] 달력 만들기 (지학사 10-나 지도서 241쪽, 이강섭 외)

- 목표 : 주어진 실생활문제를 유리함수 식으로 정리하고 문제를 그래프를 이용하여 해결한다.

어느 학교의 수학반에서는 에셔(Escher, M.C)의 그림을 표지로 한 수학학습 달력을 만들려고 한다. 사진값, 조판료, 인쇄비 등의 전체 기본 가격으로 80만원이 필요하고, 또 달력 1부당 인쇄비로 4000원씩 추가된다고 한다.
수학반에서 만들려고 하는 달력의 부수를 x부라고 하고 이 때의 전체 경비를 C원이라고 하자.

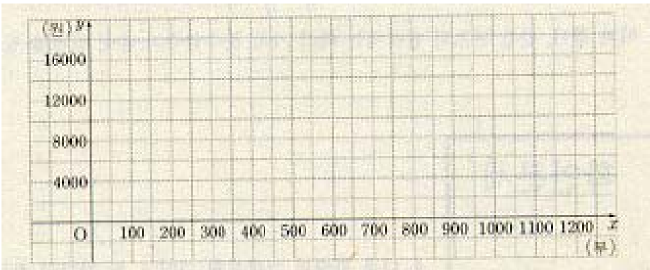
1. C를 x의 식으로 나타내어라.

2. 달력 1부당 평균경비를 y(원)이라 하고 y를 x의 식으로 나타내어라.

3. 다음 빈칸을 채워 보자.

달력의 부수(x)	10	100	1000	10000
평균 경비(y)				

4. 위의 평균경비에 대한 함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 그려 보아라.(그래프그리미)



5. 위에서 구한 그래프에서 점근선을 찾아 보아라.

6. x축에 평행한 점근선의 의미가 무엇인지를 이야기해 보아라.

<해설>

1. $C=800000+4000x$

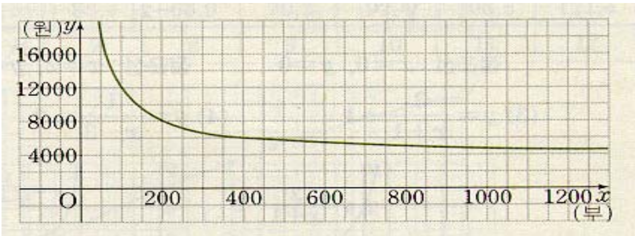
2. $y=\frac{C}{x}$ 이므로 위의 값을 대입하면 $y=\frac{800000+4000x}{x}+4000$

$\therefore\ y=\frac{800000}{x}+4000$

3. 표를 채우면 다음과 같다.

달력의 부수(x)	10	100	1000	10000
평균 경비(y)	84000	12000	4800	4080

4. 그래프를 모눈종이 위에 그리면 다음과 같다.



5. 점근선은 직선 $x=0$ 및 $y=4000$ 이다.

6. 부수 x를 크게 할수록 달력 1부당 경비 y원은 달력 1부의 인쇄비 4000원에 가까워진다. 따라서, x축과 평행한 점근선 $y=4000$은 달력을 많이 인쇄할수록 전체 기본 경비는 무시되고 1부의 인쇄비가 1부당 평균 경비에 가까워짐을 의미한다.

[과제3] 소방관의 노고 (지학사 10-나 지도서 236쪽, 이강섭 외)

- 목표 : 생활 주변의 구체적인 문제로부터 반비례관계를 얻고 이를 일반화하는 구체적인 활동을 통하여 유리함수를 도입하는데 도움을 주도록 한다. 또한, 주어진 순서쌍의 집합을 좌표평면에 나타내어 부드러운 곡선으로 이어주는 활동을 통하여 유리함수의 그래프를 직관적으로 이해하도록 한다.

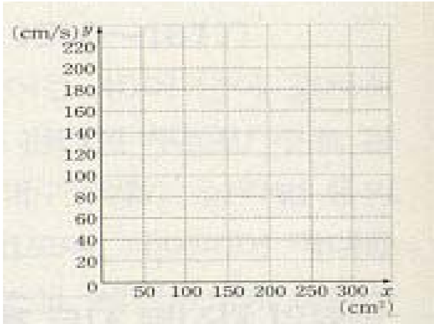
소방관이 불을 끄기 위하여 소방호스를 조정할 때, 물의 세기가 워낙 크기 때문에 굉장한 압력을 느낀다. 이러한 압력을 극복하면서 소방관들은 화재진압에 온갖 힘을 다 기울이는 것이다. 다음은 1초에 $5.4\,\mathrm{L}$ 의 물을 내뿜는 소방호스의 단면의 넓이 $x(\mathrm{cm}^2)$에 대하여 물의 속력 $y(\mathrm{m/s})$를 나타낸 것이다.

x	50	100	150	200	250	300
y	108					18

1. 위의 표를 완성하여 보아라.

2. 위의 표에서 x와 y의 관계를 식 $y=f(x)$ 꼴로 나타내어 보아라.

3. $y=f(x)$ 의 그래프를 오른쪽 모눈종이에 그려 보고 그래프그리미로 그려본 것과 비교하여 보아라.



4. 물의 속력이 200 cm/s 이상 되기 위해서는 호스의 단면의 넓이가 몇 cm^2 이하이어야 하는가?

5. 단면의 넓이가 $50\,cm^2$ 인 호스에서 나오는 물의 속력이 200 cm/s 이기 위해서는 1초에 몇 L의 물을 내뿜어야 하는가?

<해설>

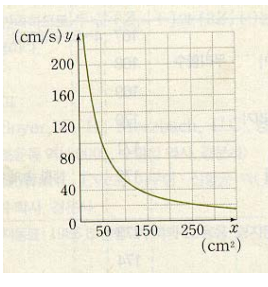
소방호스는 원기둥 모양이며 부피는 단면의 넓이와 길이의 곱이므로 1초 동안에 같은 양의 물을 내뿜으려면 그 물의 양은 단면의 넓이와 1초 동안에 물이 지나간 길이(즉, 물의 속력) 의 곱이 일정해야 한다. 따라서, 단면의 넓이 $x\,cm^2$ 와 물의 속력 y cm/s 사이에는 반비례 관계가 성립한다.

1. 아래의 표를 채우면 다음과 같다.

x	50	100	150	200	250	300
y	108	54	36	27	21.6	18

2. $y=\frac{k}{x}$ 로 놓고 $x=50$, $y=108$ 을 대입하면 $k=5400$ $\therefore$ $y=\frac{5400}{x}$

3. 그래프를 모눈종이 위에 그린 모습은 다음과 같다.



4. 1초 동안에 내뿜는 물의 양이 일정하므로 물의 속력을 크게 하려면 호스의 단면의 넓이를 작게 해야 한다.

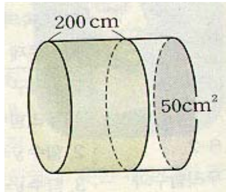
따라서 $y=\frac{5400}{x}$ 에서 $y\geq200$ 이려면 $\frac{5400}{x}\geq200$ $\quad\therefore\ x\leq27$

즉, 호스의 단면의 넓이는 $27\,\text{cm}^2$ 이하이어야 한다.

5. 물의 속력이 $200\,\text{cm/s}$ 이면 1초 동안에 길이 $200\,\text{cm}$ 안에 있는 물이 모두 내뿜어지는 것이므로 오른쪽 그림과 같이 단면의 넓이가 $50\,\text{cm}^2$ 인 호스에서 1초 동안에 내뿜는 물의 부피는

$50\times200=10000\,(\text{cm}^3)$

즉, 10L 이다.



개념정리

$y=\frac{k}{x}$ 의 그래프 (단, $k\neq0$)

① 원점과 직선 $y=x$에 대하여 대칭
② 이 그래프는 $k>0$이면 1,3사분면에, $k<0$ 이면 2,4사분면 위에 그래프가 그려진다.
③ k의 절대값이 클수록 원점에서 멀어진다.
④ 점근선의 방정식은 $x=0$, $y=0$이다.

형성평가

1. 100 km 떨어진 거리를 시속 x km 로 갈 때, 걸리는 시간을 y 시간이라 한다.
(천재교육 10-나 지도서 187쪽, 이방수 외)

(1) 다음 표의 빈칸을 채워 보아라.

x	10	20	30	40	50	60
y	10	5				

(2) y와 x의 관계를 식으로 나타내어 보아라.

2. 분수함수 $y=\dfrac{k}{x}(k\neq 0)$에 대하여 다음 물음에 답하여라.

(1) $k>0$일 때, 그래프는 몇 사분면에 있는가?

(2) $k<0$일 때, 그래프는 몇 사분면에 있는가?

(3) x의 절대값이 커질 때, 그래프는 어떤 직선에 가까워지는가?

(4) x의 절대값이 작아질 때, 그래프는 어떤 직선에 가까워지는가?

(5) 그래프그리미를 이용하여 k가 변함에 따라 그래프가 어떻게 변하는지 알아 보아라.

<풀이>

1. (1) (거리)= (시간) × (속력)이므로 $100 = xy$이다.

따라서 100 km 떨어진 거리를 시속 x km로 갈 때 걸리는 시간 y는 다음과 같다.

x	10	20	30	40	50	60
y	10	5	$\frac{10}{3}$	$\frac{5}{2}$	2	$\frac{5}{3}$

(2) $(\text{시간}) = \dfrac{(\text{거리})}{(\text{속도})}$ 이다. 따라서 속도 x와 시간 y사이의 관계식은

$y=\dfrac{100}{x}$ 이 된다.

2. (1) 제 1, 3사분면

(2) 제 2, 4사분면

(3) x축

(4) y축

(5) k의 절대값이 커짐에 따라 그래프는 원점에서 멀어짐을 알 수 있다.

참고 : http://www.openedu.com

Equation Grapher 또는 그래프마법사를 이용하여 설명가능

(3) $y=\dfrac{k}{x+p}+q\ (k\neq 0)$ 의 그래프

탐 구 활 동

[과제1] 약의 투여량 (지학사 10-나 지도서 249쪽, 이강섭 외)

● 목표 : 실생활에서 $y=\frac{k}{x+p}+q\ (k\neq 0)$ 의 모양으로 나타나는 유리함수를 찾아보고 그 그래프를 이해한다.

어린이에게 투여하는 의약품의 양은 어른에 비하여 적은 것이 일반적이다. 즉, 어떤 의약품을 어른에게 투여하는 양이 D 일 때, x살의 어린이에게 적합한 투여량 C는

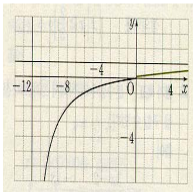
$$C=\frac{x}{x+12}D$$

이다. 다음 물음에 답하여라.

1. $y=\frac{x}{x+12}$ 의 그래프를 그리고, 점근선을 구하여라.(그래프그리미)
2. 어른에 대한 투여량이 $250\ \mathrm{mg}$ 일 때, 어린이에게 적합한 투여량을 구하여라.

<해설>

1. $y=\frac{x}{x+12}=\frac{-12}{x+12}+1$ 에서 이 유리함수의 그래프를 그리면 점근선은
   $x=-12$, $y=1$
   이 되고 이 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

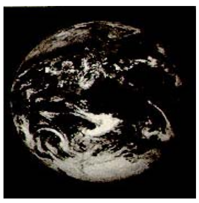


2. $x=8$, $D=250\ \mathrm{mg}$이므로 $C=\frac{8}{8+12}\times 250=100(\ \mathrm{mg})$

[과제2] 지구의 고도와 몸무게 (대한교과서 10-나 지도서 206쪽, 우정호 외)

● 목표 : 유리함수에 대한 이해를 바탕으로 다양한 실생활문제를 해결할 수 있다.

지구의 표면에서 멀어질수록 중력의 영향을 적게 받는다. 따라서 사람의 몸무게는 고도가 높아질수록 점점 줄어들게 된다. 지구표면으로부터의 고도를 h, 고도 h에서의 몸무게를 W, 지구의 반지름을 r, 해발 고도 0에서의 몸무게를 w라고 할 때 h, W, r, w사이의 관계는 $W=\frac{r}{h+r}w$로 나타낼 수 있다.



이 때 해발 고도 0에서 몸무게가 $50\ \mathrm{kg}$인 사람의 몸무게가 고도의 변화에 따라 어떻게 변하는지 알아보고자 한다.

1. 지구의 반지름을 6400 km라고 할 때 다음 표를 완성하여라.
(단, 문제를 풀기 위해서 계산기를 사용하여도 좋다)

h(km)	0	9600	25600	57600	⋯
W(kg)					⋯

2. 고도의 변화에 따른 몸무게의 변화를 그래프로 나타내어라.

3. 이 그래프의 점근선을 구하여라.

<해설>

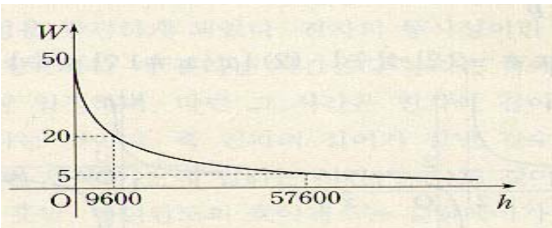
1. 지구의 반지름 $r=6400$, $w=50$을 준 식에 대입하면

$$W=\frac{6400}{h+6400}\times 50=\frac{320000}{h+6400}$$

이므로 각각의 h 값을 대입하여 계산하면 다음과 같다.

h(km)	0	9600	25600	57600	⋯
W(kg)	50	20	10	5	⋯

2. 그래프를 그리면 다음과 같다.



이 때, 그래프의 점근선은 $W=0$이 된다.

[과제3] 유리함수의 그래프

- 목표 : 그래프그리미를 이용하여 유리함수의 그래프를 직접 그려봄으로써 유리함수의 평행이동을 이해할 수 있다.

1. 그래프그리미를 이용하여 $f(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=\frac{1}{x-2}$, $h(x)=\frac{1}{x}+1$ 의 그래프를 비교해 보아라
2. 그래프그리미를 이용하여 $f(x)=\frac{1}{x-2}+1$ 의 그래프를 그려 보아라

3. 그래프그리미를 이용하여 a, b가 변할 때 $f(x) = \frac{1}{x-a} + b$ 는 어떻게 변하는지 조사하여라

<해설>

1. 그래프그리미로 그릴 것
2. 그래프그리미로 그릴 것
3. $f(x) = \frac{1}{x-a} + b$ 는 $f(x) = \frac{1}{x}$ 를 x축 방향으로 a, y축 방향으로 b만큼 평행이동시킨 그래프임을 알 수 있다.

개 념 정 리

여러 가지 유리함수의 그래프

1. $y=\frac{k}{x-a}$ 의 그래프 (단, $k \neq 0$)

① $y=\frac{k}{x}$ 의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼 평행이동시킨 그래프이다.

② 점 $(a, 0)$에 대하여 대칭이다.

③ 점근선의 방정식은 $x=a, y=0$이다

2. $y=\frac{k}{x}+b$의 그래프 (단, $k \neq 0$)

① $y=\frac{k}{x}$ 의 그래프를 y축의 방향으로 b만큼 평행이동시킨 그래프이다.

② 점 $(0, b)$에 대하여 대칭이다.

③ 점근선의 방정식은 $x=0, y=b$이다

3. $y=\frac{k}{x-a}+b$ (단, $k \neq 0$)의 그래프

① $y=\frac{k}{x}$ $(k \neq 0)$의 그래프를 x축의 방향으로 a, y축의 방향으로 b만큼 평행이동시킨 그래프이다.

② 점 (a, b)에 대하여 대칭이다.

③ 점근선의 방정식은 $x=a, y=b$이다.

형 성 평 가

1. 어떤 물건을 생산하는데 들어가는 제품 한 개당 원가를 계산하는 공식이 다음과 같다고 한다. 다음 물음에 답하여라.

x : 제품의 수량 , y : 제품 한 개당 제조원가

$y=\dfrac{10000}{x}+500$ (원)

(1) 아래의 빈칸을 채워라.

수량 x 개	1	10	50	100	200	1000	10000
원가 y 원	10500			600		510	

(2) 위에서 주어진 식의 그래프를 그려라.(그래프그리미)

(3) $y=\dfrac{10000}{x}$ 의 그래프와 비교하여 보아라.(그래프그리미)

<풀이>

(1) x에 각각의 값을 대입하여 위 표의 빈칸을 채우면 다음과 같다.

수량 x 개	1	10	50	100	200	1000	10000
원가 y원	10500	1500	700	600	550	510	501

(2) 그래프그리미로 그려서 확인할 것

(3) $y=\dfrac{10000}{x}+500$ 의 그래프는 $y=\dfrac{10000}{x}$ 의 그래프를 y축의 방향으로 500만큼 평행이동한 곡선이다

2 무리함수

학습목표

- 무리함수의 뜻을 알 수 있도록 한다.
- $y=\sqrt{ax}$ 의 그래프를 바탕으로 여러가지 무리함수의 그래프를 그릴 수 있도록 한다.

(1) 무리함수의 뜻

탐구활동

[과제1] 계산기와 컴퓨터 (<주>두산 10-나 지도서 233쪽, 임재훈 외)

- 목표 : 계산기나 컴퓨터를 이용하여 제곱근의 근사값을 구해 본다. 또한, 함수의 식이 x에 대한 무리함수임을 직관적으로 이해하고 근호 안이 0 이상일 때만 실수가 되는 성질을 이용하여 무리함수의 정의역을 추측할 수 있게 한다.

1. 계산기를 사용하여 다음 표에 나와 있는 x값들의 제곱근의 근사값을 구하여 표를 완성해 보자.

x	0.1	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0
$\sqrt{x}$	0.3	0.7			1.4						

2. 모눈종이 위에 가로축에는 x값을, 세로축에는 $\sqrt{x}$ 값을 표시하여 x값의 변화에 따른 $\sqrt{x}$ 값의 변화를 조사하여 그래프로 그려보자.(그래프그리미)

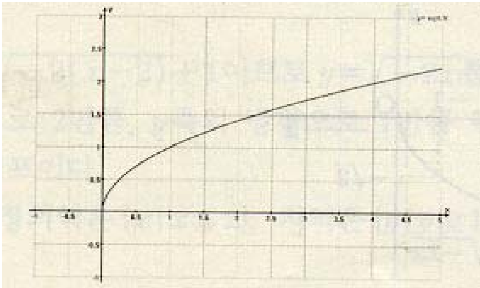
<해설>

1. 계산기나 컴퓨터를 이용하여 주어진 표를 완성하면 다음과 같다.

x	0.1	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5
$\sqrt{x}$	0.3	0.7	1.0	1.2	1.4	1.6

3.0	3.5	4.0	4.5	5.0
1.7	1.9	2.0	2.1	2.2

2. 모눈종이를 이용하여 순서쌍 $(x, \sqrt{x})$를 좌표평면에 나타낸 후, 실수 x에 대한 순서쌍 $(x, \sqrt{x})$를 컴퓨터 프로그램을 이용하여 나타내면 다음과 같다.



[과제2] 구름의 높이 (천재교육 10-나 지도서 232쪽, 신현성 외)

- 목표 : 실생활 소재로부터 무리함수를 찾고 그 뜻을 이해할 수 있다

비오는 날 빗방울이 구름에서부터 땅까지 떨어지는데 소요된 시간 t에 대하여 구름까지의 높이 h의 관계식이 다음과 같다고 한다. $h=4.9t^2$ 구름의 높이 h에 대하여 빗방울이 땅까지 떨어지는데 소요되는 시간 t의 관계식을 구하여라.

<해설>

$h=4.9t^2$을 t의 관계식으로 나타내면 다음과 같다.

$t^2=\dfrac{h}{4.9}\quad \therefore\ t=\sqrt{\dfrac{h}{4.9}}\ (h\geq 0)$

개념정리

무리함수의 뜻

함수 $y=f(x)$에서 $f(x)$가 x에 대한 무리식일 때, 이 함수를 무리함수라고 한다.

형 성 평 가

1. 반지름의 길이가 y m 인 원모양의 호수의 넓이가 x m^2 라고 할 때, 다음 물음에 답하여라.

(1) 호수의 넓이가 $4\pi\,\mathrm{m}^2$ 일 때, 호수의 반지름의 길이는 몇 m 미터인가?

(2) 호수의 반지름의 길이 y m 를 호수의 넓이 $x\,\mathrm{m}^2$ 에 대한 식으로 나타내어라.

<풀이>

1. (1) $x = y^2\pi$ 이므로 $4\pi = y^2\pi$ 따라서 $y = 2$

(2) 호수의 반지름의 길이 y를 호수의 넓이 x에 대한 식으로 나타내면 $y^2 = \frac{x}{\pi}$

따라서 $y = \sqrt{\frac{x}{\pi}}$

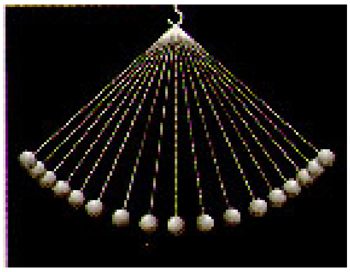
(2) 무리함수 $y = k\sqrt{ax}$ 의 그래프

탐 구 활 동

[과제1] 진자의 길이와 주기 (대한교과서 10-나 지도서 126쪽, 우정호 외)

- 목표 : 진자의 길이와 진폭의 관계에 관한 실생활 문제로부터 무리함수에 대한 그래프를 이해할 수 있다.

갈릴레이는 다양한 실험을 통하여 진자의 주기는 진폭이나 추의 질량에 관계없이 일정하며, 진자의 길이가 길어질수록 주기가 커진다는 사실을 알아냈다. 진자의 주기 T는 진자의 길이 $l\,m$의 제곱근에 비례하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.



$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{9.8}}$$

1. 이 식을 이용하여 다음 표를 완성하여라.

진자의 길이(l)	진자의 주기(T)
50 cm	
1 m	
2 m	
5 m	
10 m	

2. 그래프그리미를 이용하여 l과 T사이의 관계를 나타내는 그래프를 그려라.

<해설>

1. 진자의 길이를 준 식에 대입하여 표를 완성하면 다음과 같다.

진자의 길이(l)	진자의 주기(T)
0.5 m	0.45π
1 m	0.64π
2 m	0.90π
5 m	1.43π
10 m	2.02π

2. 그래프그리미를 이용하여 직접 그려볼 것

[과제2] 경기장에서의 사이클의 속도 (대한교과서 10-나 지도서 207쪽, 우정호 외)

● 목표 : 무리함수에 대한 이해를 바탕으로 다양한 실생활 문제를 해결할 수 있다.

사이클 경기장에서 커브를 돌 때 사이클의 바퀴는 약간 안쪽을 향하게 된다. 사이클 트랙의 면이 완전한 평면이라면 커브를 돌 때 사이클 트랙의 면과 사이클의 바퀴가 수직이 되지 않기 때문에 사이클 선수가 미끄러져 넘어질 수 있다.

이러한 현상을 방지하기 위하여 사이클 트랙의 면은 사이클의 바퀴와 수직이 되도록 약간 경사지게 만든다. 사이클 트랙의 경사 $\theta°$, 트랙의 반지름 r(m), 사이클의 속도 v(m/초)사이에는 $v=\sqrt{0.171r\theta}$ 와 같은 관계가 있다고 한다. 다음 물음에 답하여라.

1. 어떤 사이클 선수가 경사가 12° 이고 반지름의 길이가 40 m인 트랙에 들어섰다. 이 선수의 사이클 속도를 구하여라. (공학용계산기)

2. 트랙의 반지름의 길이가 80 m 일 때, 사이클의 속도가 11 m/초가 되기 위해서는 트랙의 경사를 얼마로 해야 하는가?

3. 트랙의 반지름의 길이가 100 m일 때 트랙의 경사 θ에 대한 속도 v의 그래프를 그려 보아라.

<해설>

1. $v=\sqrt{0.171\times40\times12}\fallingdotseq9.06$
2. $11=\sqrt{0.171\times80\times\theta}$ 에서 θ의 값을 구하면

   $11^2=0.171\times80\times\theta$, $\theta=\dfrac{11^2}{0.171\times80}\fallingdotseq8.85$ 가 된다.
3. 그래프그리미로 그릴 것

[과제3] $y=\sqrt{x}$ 를 대칭이동한 무리함수의 그래프 그리기

- 목표 : 그래프그리미를 이용하여 여러 무리함수의 그래프를 그릴 수 있도록 한다.

1. 다음 무리함수의 그래프를 그려 보아라. (그래프그리미) $y=\sqrt{-x}$, $y=-\sqrt{x}$, $y=-\sqrt{-x}$
2. $y=\sqrt{x}$ 와 위의 세 함수의 그래프의 대칭관계를 조사하여라.
3. $y=\sqrt{ax}$ 에서 a의 값이 변할 때 그래프는 어떻게 변화하는지 조사하여라

<해설>

1. 그래프그리미로 그릴 것
2. 위의 무리함수는 각각 y축, x축, 원점에 관하여 대칭임을 알 수 있다.
3. $|a|$ 의 값이 커짐에 따라 그래프의 폭이 넓어짐을 알 수 있다.

개 념 정 리

$y=k\sqrt{ax}$ 의 그래프

1. $y=\sqrt{ax}$ ($a\neq0$)의 그래프

   ① $a>0$ 일 때는 원점과 제 1사분면 위에 나타나는 그래프가 된다.

   정의역 $\{x\,|\,x\geq0\}$ 치 역 $\{y\,|\,y\geq0\}$

   ② $a<0$ 일 때는 원점과 제 2사분면 위에 나타나는 그래프가 된다.

   정의역 $\{x\,|\,x\leq0\}$ 치 역 $\{y\,|\,y\geq0\}$

2. $y=-\sqrt{ax}$ ($a\neq0$)의 그래프

   ① $a>0$ 일 때는 원점과 제 4사분면 위에 나타나는 그래프

   정의역 $\{x\,|\,x\geq0\}$ 치 역 $\{y\,|\,y\leq0\}$

   ② $a<0$ 일 때는 원점과 제 3사분면 위에 나타나는 그래프

   정의역 $\{x\,|\,x\leq0\}$ 치 역 $\{y\,|\,y\leq0\}$

형 성 평 가

1. 가로의 길이가 $y\,\mathrm{m}$ 이고 세로의 길이가 $2y\,\mathrm{m}$ 인 직사각형 모양의 밭의 넓이를 $x\,\mathrm{m}^2$ 라고 할 때, 다음 물음에 답하여라.

(1) 밭의 넓이 x와 가로의 길이 y를 대응시키고 있는 아래의 표를 완성하여라.

x	0	2	4	8	16
y	0			2	

(2) y를 x에 대한 식으로 나타내어라.

(3) 위의 (1)에서 구한 점들을 좌표평면 위에 찍고 이 점들을 곡선으로 연결한 후 (2)에서 구한 식을 이용하여 그래프그리미로 그리고 그래프와 비교하여라.

(4) (2)에서 구한 식에서 x대신에 $-x$를 대입한 후 그래프그리미를 이용하여 그래프를 그려보고 (3)에서 그린 그래프와 비교하여라.

2. 함수 $y=-\sqrt{x}$ 에서 아래의 표는 각각의 x값에 대한 y의 값을 대응시키는 과정이다.

(1) 아래의 빈칸을 채워라.

x	0		2	4	8
y	0	-1		-2	

(2) 그래프그리미를 이용하여 위의 $y=-\sqrt{x}$ 의 그래프를 그린 후 $y=\sqrt{x}$와 비교하여 그 특징을 이야기해 보아라.

(3) 같은 방법으로 $y=-\sqrt{-x}$ 그래프를 그린 후 $y=\sqrt{x}$ 와 비교하여라.

<풀이>

1. (1) 표를 완성시키면 아래와 같다.

x	0	2	4	8	16
y	0	1	$\sqrt{2}$	2	$2\sqrt{2}$

(2) $2y^2=x$ 이므로 $y=\sqrt{\dfrac{x}{2}}$ 가 된다.

(3) 그래프그리미로 그래프를 그린 후 비교할 것

(4) 그래프그리미로 그래프를 그려서 그래프가 y 축에 대해서 대칭이 됨을 확인할 것

2. (1) 위의 빈칸을 채우면 다음과 같다.

x	0	1	2	4	8
y	0	-1	$-\sqrt{2}$	-2	$-2\sqrt{2}$

(2) $y=-\sqrt{x}$의 그래프는 $y=\sqrt{x}$의 그래프와 x축에 대해서 대칭이 된다.

(3) $y=-\sqrt{-x}$ 의 그래프는 $y=\sqrt{x}$의 그래프와 원점에 관해서 대칭이 된다.

(3) 무리함수 $y=\sqrt{ax+b}+c$ 의 그래프

탐 구 활 동

[과제1] 바람 속에 숨어 있는 수학 (지학사 10-나 지도서 243쪽, 이강섭 외)

● 목표 : 우리생활 주변에서 무리식과 관계 있는 구체적인 문제를 찾아서 무리함수의 도입에 도움을 주도록 한다. 또한, 주어진 순서쌍의 집합을 좌표평면에 나타내어 부드러운 곡선으로 이어주는 활동을 통하여 무리함수의 그래프를 직관적으로 이해하도록 한다.

바람의 세기를 나타내는 보퍼트 풍력 계급은 0부터 12까지 13단계가 있다. 지상 10 m의 위치에서 바람의 속력을 x km/h라고 할 때, 이 값을 보퍼트 계급으로 나타내는 공식은 다음과 같다.

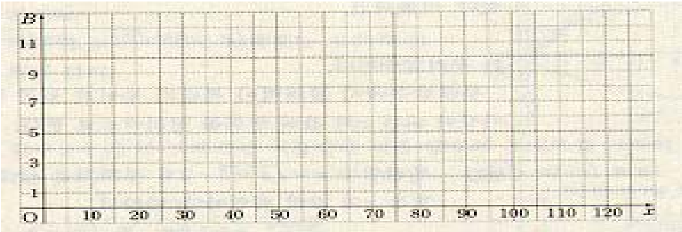
$$B=1.5\sqrt{x+12.8}-5.4$$

1. 전자계산기를 사용하여 다음 표를 완성하여 보아라.
(단, 소수 첫째자리에서 반올림한다.)

속도 x	0	5.3	11.4	18.5	26.4	35.2	44.9
계급 B							

속도 x	55.4	66.9	79.2	92.4	106.5	121.4	137.7
계급 B							

2. 속도 x와 계급 B의 관계를 아래의 좌표평면에 나타내고 곡선으로 이어보아라.



3. 보퍼트 풍력 계급 B가 1일 때에는 연기가 수직으로 올라가고 10일 때에는 큰 나무의 뿌리가 뽑히는 정도의 위험이 있다. 각 보퍼트 풍력계급에 해당하는 바람의 상태를 알아보아라.

<해설>

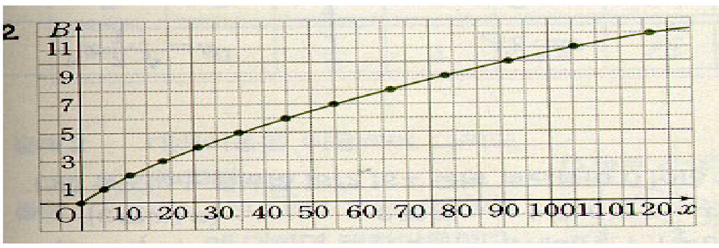
무리함수는 무리식으로 표현되는 함수임을 직관적으로 인식하고, 그 그래프의 모양을 추측할 수 있도록 한다.

1. 아래의 표를 채우면 다음과 같다.

속도 x	0	5.3	11.4	18.5	26.4	35.2	44.9
계급 B	0	1	2	3	4	5	6

속도 x	55.4	66.9	79.2	92.4	106.5	121.4	137.7
계급 B	7	8	9	10	11	12	13

2. 그래프를 그리면 다음과 같다.



3. 보퍼트 풍력계급에 따른 자연현상을 나타내면 다음과 같다.

0 : 연기가 수직으로 올라간다.
1 : 연기를 보면 바람의 방향을 알 수 있을 정도이다.
2 : 얼굴에 바람이 느껴진다.
3 : 나뭇잎이 움직이고 깃발이 가볍게 날린다.
4 : 먼지가 일고 작은 나뭇가지가 흔들린다.
5 : 작은 나무가 흔들리고 강의 잔물결이 일어난다.
6 : 큰 가지가 흔들리고 우산 받기가 힘들다.
7 : 큰 나무 전체가 흔들리고 걷기가 어렵다.
8 : 작은 나무가 꺾이고 바람을 향해 걸을 수 있다.
9 : 지붕이 날아간다.
10 : 나무가 뿌리째 뽑힌다.
11 : 광범위하게 피해가 있다.
12 : 모두 부서져서 쓰레기 더미가 된다. 육지에서 관측된 예가 없다.

[과제2] 여러 무리함수의 그래프 그리기

- 목표 : 그래프그리미를 이용하여 무리함수의 그래프를 직접 그려봄으로써 무리함수의 평행이동을 이해할 수 있다.

1. 그래프그리미를 이용하여 다음 함수의 그래프를 그리고 비교하여 보아라.
   $y=\sqrt{2x}$, $y=\sqrt{2x-2}$, $y=\sqrt{2x-2}+3$
2. $y=\sqrt{x-a}+b$의 그래프는 어떻게 변하는지 조사해 보아라.

<해설>

1. $y=\sqrt{2x-2}$ 는 $y=\sqrt{2x}$ 를 x축 방향으로 1만큼, $y=\sqrt{2x-2}+3$은 $y=\sqrt{2x}$를 x축 방향으로 1만큼, y축 방향으로 3만큼 평행이동시킨 것이다.
2. $y=\sqrt{x}$ 를 x축 방향으로 a, y축 방향으로 b만큼 평행이동시킨 것이다.

개념정리

여러 가지 무리함수의 그래프

$y=\sqrt{ax+b}+c$ (단, $a\neq0$)의 그래프

① $y=\sqrt{a(x-m)}+n$ 의 꼴로 나타낸다

② 위의 함수는 $y=\sqrt{ax+b}+c$ $=$ $\sqrt{a\left(x+\frac{b}{a}\right)}+c$ 가 되어

$m=-\frac{b}{a}$, $n=c$가 되므로 $y=\sqrt{ax}$ 의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{b}{a}$, y축의 방향으로 c만큼 평행이동시킨 그래프이다

형 성 평 가

1. 함수 $y=\sqrt{2x-4}+3$ 에 대하여 다음 물음에 답하여라.

(1) 정의역과 치역을 각각 구하여라.

(2) 주어진 함수의 그래프를 그려 보아라.(그래프그리미)

(3) 주어진 함수의 그래프와 함수 $y=\sqrt{2x}$ 의 그래프를 비교하여 보아라.(그래프그리미)

<풀이>

1. (1) 정의역은 $\{x \mid x \geqq 2\}$ 이고 치역은 $\{y \mid y \geqq 3\}$ 이다..

(2) 그래프그리미를 이용하여 그림을 그릴 것

(3) $y=\sqrt{2x}$ 의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 y축의 방향으로 3만큼 평행이동하면 주어진 그래프가 된다.