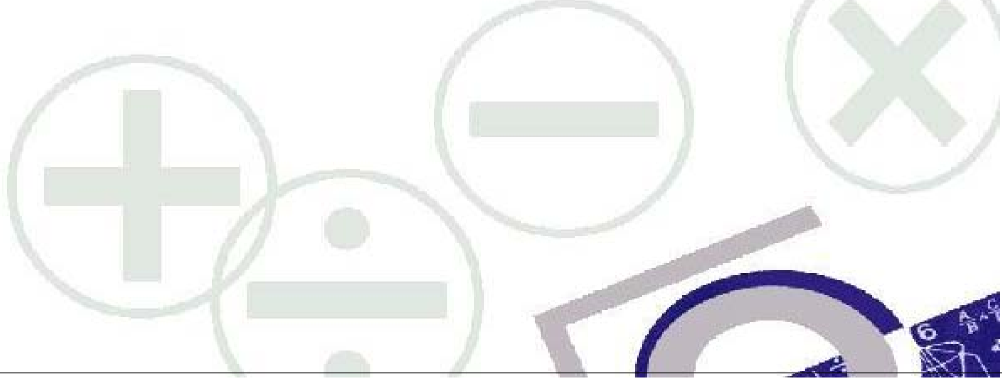
Ⅵ. 삼각함수

1. 일반각과 호도법
2. 삼각함수와 그 성질
3. 삼각함수의 그래프
4. 삼각방정식과 삼각부등식



1 일반각과 호도법

학습목표

- 일반각의 뜻을 알고 일반각을 좌표평면에 나타낼 수 있다.
- 호도법의 뜻을 알고 호도법과 육십분법 사이의 관계를 이해한다.
- 호도법을 이용하여 부채꼴의 호의 길이와 넓이를 구할 수 있다.

(1) 일반각의 뜻

탐 구 활 동

[과제1] 발레리나의 회전량 (대한교과서 10-나 지도서 215쪽, 박윤범 외)

- 목표 : 실생활에서 회전각을 나타낼 때, $360°$가 넘는 각이 필요함을 알게 하고 이를 일반각의 개념으로 자연스럽게 연관지을 수 있도록 한다.

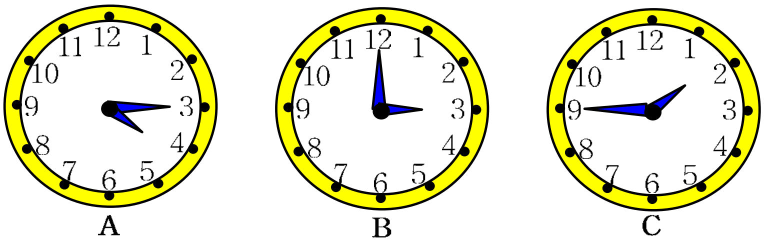
발레에서 사용되는 용어는 대부분 프랑스어인데, 회전하는 동작을 ‘뚜르네(tourner)’라 한다. 다음 물음에 답하여라.
1. 1회전은 몇 도(°) 회전한 것인가?
2. 2회전, 3회전은 각각 몇 도(°) 회전한 것인가?

<해설>
1. $360°$
2. 2회전: $360° \times 2 = 720°$
   3회전: $360° \times 3 = 1080°$

[과제2] 시계의 회전방향 (금성출판사 10-나 지도서 184쪽, 양승갑 외)

- 목표 : 시계바늘의 분침을 시계 방향과 시계 반대 방향으로 회전시킴으로써 음의 각과 양의 각을 이해한다.

아래 시계는 시계 B를 기준으로 볼 때, 시계 A는 1시간 15분이 빠르고, 시계 C는 1시간 15분이 느리다. 다음 물음에 답하여라.



1. 시계 A를 시계 B에 맞추려면 긴 바늘을 어느 방향으로 몇 도 만큼 회전하면 되는가?
2. 시계 C를 시계 B에 맞추려면 긴 바늘을 어느 방향으로 몇 도 만큼 회전하면 되는가?

<해설>

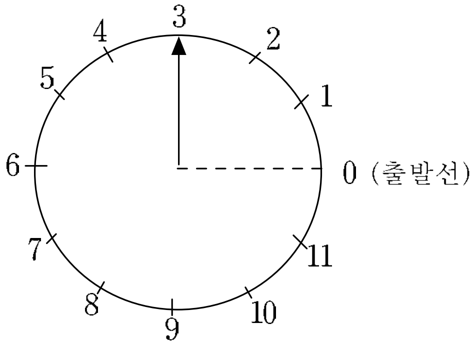
1. 시계 A의 긴 바늘을 시계 반대 방향으로 360° 회전시킨 후 90° 더 회전시켜야 한다. 즉, 시계 반대 방향으로 450°만큼 회전시킨다.
2. 시계 C의 긴 바늘을 시계 방향으로 360° 회전시킨 후 90° 더 회전시켜야 한다. 즉, 시계 방향으로 450°만큼 회전시킨다.

[과제3] 회전목마의 회전량 (지학사 10-나 지도서 258쪽, 이강섭 외)

- 목표 : 원운동하는 회전목마에서 회전량을 거리와 각으로 나타내어 보도록 한다.

놀이공원의 회전목마가 원둘레 위를 움직인 거리와 회전한 각에 대하여 생각하여 보자. 이 때 회전목마가 상하로 움직인 것은 생각하지 않도록 하자.

1. 회전목마를 타고 한바퀴 돌았을 때 원둘레 위를 움직인 거리를 구하여 보자. 이 때 반지름의 길이는 움직인 거리에 어떤 영향을 미치는가?
2. 아래의 그림과 같이 회전목마의 평면 그림을 나타내는 원판에서 원판의 0을 출발점으로 하여 시계 반대 방향으로 돌 때 바늘이 출발선과 이루는 각의 크기를 구하여 보자.



바늘의 위치	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	0
각도			$90°$			$180°$			$270°$			$360°$

3. 회전목마가 원둘레 위를 $\frac{1}{4}$바퀴 돌 때, 중심각의 크기를 구하여 보자.
4. 원의 반지름의 길이가 달라지면 중심각의 크기는 어떻게 되는가?
5. 앞의 회전목마가 0에서 출발하여 원둘레를 $60°$ 돌면 입구가 나온다. 다음의 각 경우에 대하여 회전한 각의 크기를 구하여 보자.
   (1) 한 바퀴 더 돌고 난 후 입구에 도달했을 때 회전한 각의 크기는 얼마인가?
   (2) 두 바퀴 더 돌고 난 뒤 입구에 도달할 때의 회전한 각의 크기는?
   (3) 세 바퀴 더 돌고 난 뒤 입구에 도달할 때의 회전한 각의 크기는?

<해설>

1. 반지름의 길이가 r 인 원 둘레의 길이는 $2\pi r$이므로 움직인 거리는 $2\pi r$이다. 이 때 반지름의 길이 r이 커질수록 원운동거리 $2\pi r$도 커진다. 예를 들면 반지름의 길이가 2배 커지면 운동 거리도 2배 커진다.
2. $360°$를 12등분하면 $30°$이므로 바늘의 위치에 따라 다음과 같이 각의 크기를 구할 수 있다.

바늘의 위치	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	0
각도	$30°$	$60°$	$90°$	$120°$	$150°$	$180°$	$210°$	$240°$	$270°$	$300°$	$330°$	$360°$

회전을 한바퀴에만 국한하지 말고 두 바퀴, 세 바퀴 회전하는 활동을 통하여 $360°$보다 더 큰 각의 개념을 정의할 필요성을 인식시킨다.

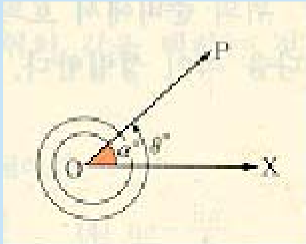
3. 원둘레 위를 $\frac{1}{4}$바퀴 돌았을 때는 바늘의 위치가 $12\times\frac{1}{4}=3$이므로 구하는 중심각의 크기는 $90°$이다.
4. 원의 반지름의 길이 r와 원운동거리 $2\pi r$는 정비례하지만 반지름의 길이와 r는 회전한 각 θ에는 아무런 영향을 주지 않는다. 즉 회전목마의 바깥쪽에 탄 사람은 안쪽에 탄 사람보다 원운동거리로 보면 더 많이 움직였지만 회전한 각의 크기는 서로 같다.
5. 한 바퀴 돌기 위해서는 $360°$만큼 돌아야 함을 이용한다.
   (1) $60°+360°=420°$
   (2) $60°+360°\times2=780°$
   (3) $60°+360°\times3=1140°$

개 념 정 리

일반각

동경 OP 가 시초선 OX 에서 출발하여 점 O 를 중심으로 회전하였을 때, 그 회전량 θ° 를 $\angle XOP$ 의 크기로 정의한다. $\angle XOP$ 의 크기의 하나를 α° 라고 할 때, 동경 OP 의 일반각 θ° 는

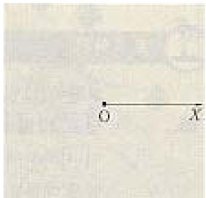
$\theta^\circ = 360 \times n + \alpha^\circ$ (단, n 은 정수)



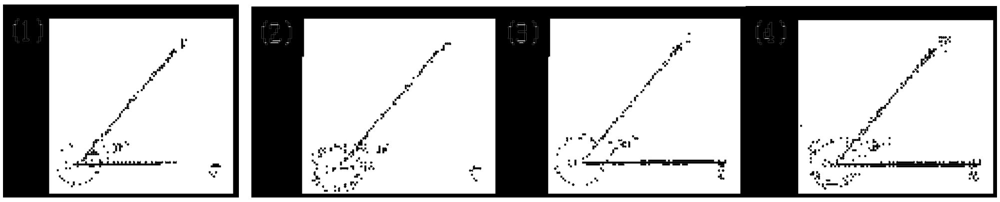
형 성 평 가

1. 다음 각도에 대한 동경의 위치를 각도기를 이용하여 오른쪽 시초선 OX를 기준으로 나타내어라.

(1) 45° (2) 150° (3) −120° (4) −60°



2. 다음 그림은 같은 위치의 동경 OP에 대한 여러 각의 크기를 나타낸 것이다. 빈칸에 알맞은 것을 써 넣고 물음에 답하여라.



(1) 360°× $\square$ +50°

(2) 360°× $\square$ +50°

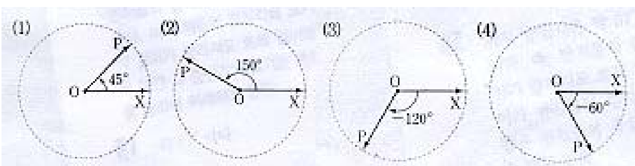
(3) 360°× $\square$ +50°

(4) 360°× $\square$ +50°

(5) 동경 OP가 나타내는 일반각을 구하시오.

<풀이>

1.



2. (1) 1 (2) 2 (3) -1 (4) -2 (5) $360° \times n + 50°$ (단, n은 정수)

(참고) 위의 두 문제에서 $\angle$XOP의 크기가 주어지면 동경 OP의 위치는 하나로 결정되지만 동경 OP의 위치가 주어졌을 때는 $\angle$XOP의 크기는 하나로 결정되지 않는다는 사실을 알 수 있다.

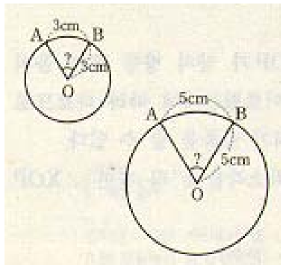
(2) 호도법의 뜻

탐 구 활 동

[과제1] 라디안의 뜻 (교학사 10-나 지도서 210쪽, 박규홍 외)

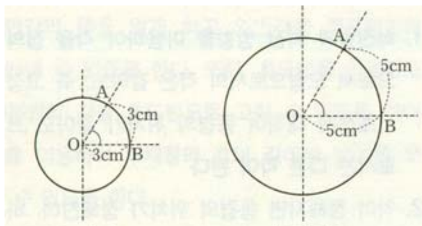
- 목표 : 반지름의 길이와 호의 길이가 같을 때 부채꼴의 중심각의 크기는, 부채꼴의 크기에 관계없이 일정함을 이해하도록 한다.

1. 반지름의 길이가 3cm인 원을 그리고, 길이가 3cm인 실의 한 끝을 A에 고정시켜 원 위에 놓을 때, 실의 다른 끝을 B라 하자. 이 때, 각도기를 써서 $\angle$AOB의 크기를 구하여라.
2. 위와 같은 방법으로 반지름의 길이와 실의 길이가 5 cm인 경우의 $\angle$AOB의 크기를 구하고, 위의 결과와 비교하여라.

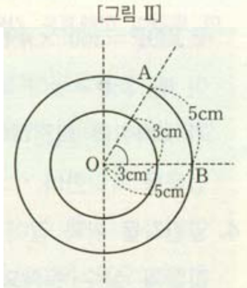


<해설>

[그림 I]에서와 같이 반지름의 길이와 호의 길이가 모두 3cm인 부채꼴에서 중심각 $\angle$AOB의 크기를 각도기를 사용하여 재보면 대략 $57°2'$이다.
[그림 II]에서와 같이 반지름의 길이와 호의 길이가 모두 5cm인 부채꼴에서 중심각 $\angle$AOB의 크기를 각도기를 사용하여 재보면 대략 $57°2'$ 이다.
또한, [그림III]과 같이 결과를 비교하여 보면 반지름의 길이에 관계없이 호의 길이와 반지름의 길이가 같은 부채꼴의 중심각의 크기는 같다는 것을 알 수 있다. 여기서, 정확한 각의 크기는 $57°17''45'\cdots$ 으로 각도기로 정확한 값을 얻을 수는 없다. 하지만 이와 같이 반지름의 길이와 호의 길이가 같을 때의 중심각의 크기를 각의 새로운 단위로 도입하면 각의 크기는 길이의 개념으로 바뀌어 육십분법에서 십진법으로 나타낼 수 있다.



[그림 I] [그림 II]



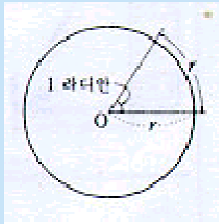
[그림 III]

개 념 정 리

호도법과 육십분법

(1) 호도법 : 한 원에서 그 반지름의 길이와 같은 길이의 호에 대한 중심각의 크기를 1라디안 또는 1호도라고 한다.

(2) 1라디안 $= \dfrac{180^\circ}{\pi}$, $1^\circ = \dfrac{\pi}{180}$ 라디안



형 성 평 가

1. 호도법과 육십분법 사이의 관계를 이용하여 다음 빈 칸에 알맞은 것을 채우시오.

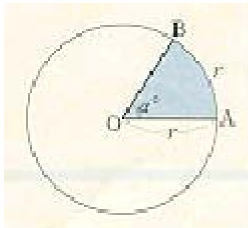
육십분법		150°		330°	육십분법		120°		300°
호도법	$\frac{\pi}{6}$		$\frac{7}{6}\pi$		호도법	$\frac{\pi}{3}$		$\frac{4}{3}\pi$	
육십분법		135°		315°	육십분법		180°		360°
호도법	$\frac{\pi}{4}$		$\frac{5}{4}\pi$		호도법	$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3}{2}\pi$	

2. 호의 길이는 중심각의 크기와 정비례함을 이용하여 1라디안이 대략 몇 도(°)인지를 구하는 과정이다. ㈎, ㈏에 알맞은 것을 써 넣으시오.

오른쪽 그림과 같이 중심이 O이고, 반지름이 r인 호 AB에 대한 중심각 ∠AOB의 크기를 α° 라 하면

$360^\circ : \alpha^\circ = 2\pi r :$ ㈎

$\therefore \ \alpha^\circ = \dfrac{㈏}{\pi} \fallingdotseq 57^\circ\ 17'45''$



<풀이>

1.

육십분법	30°	150°	210°	330°	육십분법	60°	120°	240°	300°
호도법	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5}{6}\pi$	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	호도법	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$
육십분법	45°	135°	225°	315°	육십분법	90°	180°	270°	360°
호도법	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	호도법	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π

2. ㈎ r ㈏ 180°

(3) 부채꼴의 호의 길이와 넓이

탐 구 활 동

[과제1] 양이 많은 피자의 선택 (두산 10-나 지도서 261쪽, 임재훈 외)

- 목표 : 반지름의 길이가 일정할 때 중심각의 크기가 같은 부채꼴의 넓이는 서로 같음을 실생활 속에서 찾아보고 문제를 해결할 수 있도록 한다.

부채꼴 모양의 피자 조각 A, B가 있다. 피자 조각 A는 반지름의 길이가 10 cm인 원 모양의 피자를 6조각낸 것이고, 피자 조각 B는 반지름의 길이가 20 cm인 원 모양의 피자를 12조각낸 것이다. 양이 많은 피자를 찾으려면 어느 것을 선택해야 하는지 생각해 보아라.(단, 두 피자조각의 두께는 같다.)

<해설>

두 피자 조각의 두께가 같으므로 피자 조각의 양은 부채꼴의 모양의 피자 조각 넓이에 따른다. 반지름의 길이가 10 cm인 원 모양의 피자 넓이는 $\pi \cdot 10^2 \mathrm{cm}^2$이므로 6조각 중 한 조각인 A의 넓이는 $\frac{100}{6}\pi = \frac{50}{3}\pi(\mathrm{cm}^2)$이다.

또, 반지름의 길이가 $20cm$인 원 모양의 피자 넓이는 $\pi \cdot 20^2 \mathrm{cm}^2$이므로 12조각 중 한 조각인 B의 넓이는 $\frac{400}{12}\pi = \frac{100}{3}\pi(\mathrm{cm}^2)$이다.

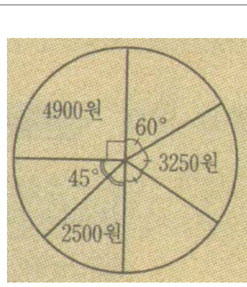
따라서 B가 A의 양의 2배가 되므로 양이 많은 피자를 찾으려면 B를 선택해야 한다.

[과제2] 합리적인 피자의 선택 (교학사 10-나 지도서 211쪽, 박규홍 외)

- 목표 : 반지름의 길이가 일정할 때 부채꼴의 넓이가 중심각의 크기에 비례함을 실생활 속에서 찾아보고 문제를 해결할 수 있도록 한다.

어떤 피자 가게에서 반지름의 길이가 16 cm인 원 모양의 피자를 오른쪽 그림과 같이 여섯 조각으로 나누어서 팔고 있었다. 그림의 숫자는 세 부분의 피자 조각의 가격일 때, 다음을 알아보자.

1. 세 부분의 피자 조각의 넓이를 각각 구하여라.
2. 세 부분 중 어떤 조각의 피자를 사는 것이 가장 경제적인지 알아보자.



<해설>

1. 세 부분의 피자 조각의 넓이를 구해보면

   4900 원짜리 피자의 중심각의 크기는 $90°$이므로 피자의 넓이는

   $\pi \times 16^2 \times \frac{90}{360} = 64\pi \mathrm{cm}^2$

   2500 원짜리 피자의 중심각의 크기는 $45°$이므로 피자의 넓이는

   $\pi \times 16^2 \times \frac{45}{360} = 32\pi \mathrm{cm}^2$

   3250 원짜리 피자의 중심각의 크기는 $60°$이므로 피자의 넓이는

   $\pi \times 16^2 \times \frac{60}{360} = \frac{128}{3}\pi \mathrm{cm}^2$

2. 피자 조각들의 $1\mathrm{cm}^2$당 피자의 가격을 구해보면

   4900 원짜리 피자는 $1\mathrm{cm}^2$당 피자의 가격이 $\frac{4900}{64\pi}$ 원

   2500 원짜리 피자는 $1\mathrm{cm}^2$당 피자의 가격이 $\frac{5000}{64\pi}$ 원

   3250 원짜리 피자는 $1\mathrm{cm}^2$당 피자의 가격이 $\frac{4875}{64\pi}$ 원

   따라서, 세 부분 중에서 중심각의 크기가 $60°$인 피자를 사는 것이 가장 경제적이다.

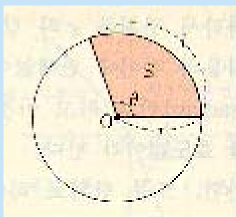
개 념 정 리

,

부채꼴의 호의 길이와 넓이

반지름의 길이가 r, 중심각의 크기가 θ(라디안)인 부채꼴의 호의 길이를 l, 넓이를 S라고 하면,

$l = r\theta,\ S = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}rl$



형 성 평 가

1. 반지름의 길이가 $12\mathrm{cm}$이고, 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$인 부채꼴의 호의 길이를 구하여라.

2. 반지름의 길이가 $6\mathrm{cm}$이고, 중심각의 크기가 $150°$ 인 부채꼴의 넓이를 구하여라.

3. 다음 ㉮~㉲에 알맞은 것을 써 넣으시오.

호도법을 이용하면 부채꼴의 길이와 넓이를 간편하게 구할 수 있다.
반지름의 길이가 r, 중심각의 크기가 θ(라디안)인 부채꼴 OAB에서 호 AB의 길이를 l이라고 하면, 호의 길이는 중심각의 크기에 비례하므로

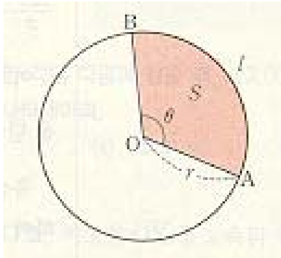
l: ㉮ $= \theta : 2\pi$

$\therefore$ $l =$ ㉯

부채꼴 OAB의 넓이를 S라고 하면, 부채꼴의 넓이도 중심각의 크기에 비례하므로

S: ㉰ $= \theta : 2\pi$

$\therefore$ $S = \frac{1}{2}$ ㉱ $= \frac{1}{2}$ ㉲



<풀이>

1. $l = r\theta = 12 \times \frac{\pi}{3} = 4\pi\,(\text{cm})$

2. $150^\circ = \frac{5}{6}\pi$ 이므로 $S = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2} \times 6^2 \times \frac{5}{6}\pi = 15\pi\,(\text{cm}^2)$

3. ㉮ $2\pi r$ ㉯ $r\theta$ ㉰ πr^2 ㉱ $r^2\theta$ ㉲ rl

2 삼각함수와 그 성질

학습목표

- 일반각에 대한 삼각함수의 뜻을 안다.
- 삼각함수 사이의 상호 관계를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
- 삼각함수의 성질을 이용하여 삼각함수의 값을 구할 수 있다.

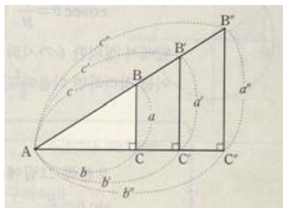
(1) 삼각함수의 뜻

탐 구 활 동

[과제1] 크기가 다른 닮음삼각형의 삼각비 (천재 10-나 지도서 249쪽, 신현성 외)

- 목표 : 닮은 직사각형에서 대응하는 변의 길이의 비는 같음을 보고 각의 크기가 같으면 삼각비는 삼각형의 크기와는 무관함을 알게 한다.

오른쪽 그림과 같이 $\angle \mathrm{A}$ 를 공통으로 갖는 세 개의 직각삼각형에서 다음 물음에 답하여라.



1. $\triangle \mathrm{ABC}$ 에서 $\angle \mathrm{A}$ 에 대한 삼각비 $\sin A$, $\cos A$, $\tan A$ 의 값을 구하여라.
2. $\triangle \mathrm{ABC}$, $\triangle \mathrm{AB'C'}$, $\triangle \mathrm{AB''C''}$ 에서 $\angle \mathrm{A}$ 에 대한 삼각비 $\sin A$, $\cos A$, $\tan A$ 의 값은 각각 어떠한지 조사해 보아라.

<해설>

1. $\sin A = \dfrac{a}{c}$, $\cos A = \dfrac{b}{c}$, $\tan A = \dfrac{a}{b}$
2. $\triangle \mathrm{ABC} \backsim \triangle \mathrm{AB'C'}$ 이므로

$$c : c' = a : a' \quad \therefore \frac{a}{c} = \frac{a'}{c'} \quad \cdots ①$$

또, $\triangle \mathrm{ABC} \backsim \triangle \mathrm{AB''C''}$ 이므로

$$c : c'' = a : a'' \quad \therefore \frac{a}{c} = \frac{a''}{c''} \quad \cdots ②$$

①, ②에서 $\sin A = \dfrac{a}{c} = \dfrac{a'}{c'} = \dfrac{a''}{c''}$

따라서, 삼각형의 크기가 달라도 $\sin A$ 의 값은 같다.

마찬가지로 $\cos A$ 와 $\tan A$ 도 삼각형의 크기와 관계없이 같다.

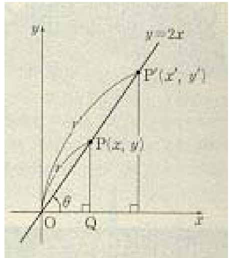
[과제2] 같은 동경 위에서의 삼각함수 (지학사 10-나 지도서 264쪽, 이강섭 외)

- 목표 : 삼각함수의 값은 동경 위의 임의의 점에 대하여 무관함을 알도록 한다.

오른쪽 그림과 같이 직선 $y=2x$ 위의 두 점 $\mathrm{P}(x, y)$, $\mathrm{P}(x', y')$ 이 제 1사분면에 있다. (단, $\overline{\mathrm{OP}}=r$, $\overline{\mathrm{OP'}}=r'$)

1. 다음 값을 구하여 보자.

$\frac{x}{r}$	$\frac{y}{r}$	$\frac{y}{x}$	$\frac{x'}{r}$	$\frac{y'}{r}$	$\frac{y'}{x'}$



2. 직각삼각형 POQ에서 각 POQ의 크기를 θ라고 할 때, 다음 삼각비의 값을 구하여 보자.

(1) $\sin\theta$ (2) $\cos\theta$ (3) $\tan\theta$

<해설>

P′에서 x축에 내린 수선의 발을 Q′이라고 하면

$\triangle \mathrm{POQ} \backsim \triangle \mathrm{P'OQ'}$이므로 두 직각삼각형의 대응하는 변의 길이는 일정하다.

따라서, 점 P를 직선 위의 어떤 점으로 잡더라도 $\triangle\mathrm{POQ}$에서의 두 변의 비는 일정하다.

1. $\mathrm{P}(x, y)=\mathrm{P}(x, 2x)$, $r=\sqrt{x^2+(2x)^2}=\sqrt{5}x$

$\mathrm{P'}(x', y')=\mathrm{P}(x', 2x')$, $r=\sqrt{x'^2+(2x')^2}=\sqrt{5}x'$ 이므로

$\frac{x}{r}$	$\frac{y}{r}$	$\frac{y}{x}$	$\frac{x'}{r}$	$\frac{y'}{r}$	$\frac{y'}{x'}$
$\frac{\sqrt{5}}{5}$	$\frac{2\sqrt{5}}{5}$	2	$\frac{\sqrt{5}}{5}$	$\frac{2\sqrt{5}}{5}$	2

2. (1) $\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

(2) $\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{\sqrt{5}}{5}$

(3) $\tan\theta=\frac{y}{x}=2$

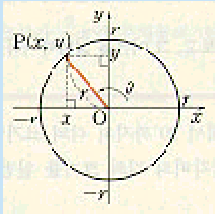
개 념 정 리

,

삼각함수의 정의

$\sin\theta = \frac{b}{r}$, $\cos\theta = \frac{a}{r}$, $\tan\theta = \frac{b}{a}$

$\mathrm{cosec}\,\theta = \frac{r}{b}$, $\sec\theta = \frac{r}{a}$, $\cot\theta = \frac{a}{b}$



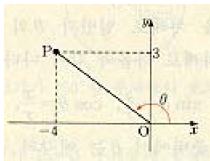
형 성 평 가

1. 원점과 점 $\mathrm{P}(-4, 3)$ 을 잇는 선분을 포함하는 동경이 이루는 각을 θ라 할 때, $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$, $\mathrm{cosec}\,\theta$, $\sec\theta$, $\cot\theta$ 를 모두 구하여라.

2. θ가 제 2사분면을 나타내는 각일 때, $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$의 부호를 구하고 그 이유를 서술하여라.

<풀이>

1. 오른쪽 그림에서 $\overline{\mathrm{OP}}$ 의 길이가 5 이므로 삼각함수의 정의에 의하여



$\sin\theta = \frac{3}{5}$, $\mathrm{cosec}\,\theta = \frac{5}{3}$

$\cos\theta = \frac{-4}{5} = -\frac{4}{5}$, $\sec\theta = \frac{5}{-4} = -\frac{5}{4}$

$\tan\theta = \frac{3}{-4} = -\frac{3}{4}$, $\cot\theta = \frac{-4}{3} = -\frac{4}{3}$

2. 오른쪽 그림과 같이 θ가 제2사분면의 각일 때,

$x < 0$, $y > 0$, $r > 0$

삼각함수의 정의에 의해

$\sin\theta = \frac{y}{r} > 0$, $\cos\theta = \frac{x}{r} < 0$, $\tan\theta = \frac{y}{x} < 0$

(2) 삼각함수 사이의 관계

탐 구 활 동

[과제1] 특정한 각에 대한 삼각함수 사이의 관계

● 목표 : 삼각함수 사이에 동경에 관계없이 항상 일정한 관계가 있음을 알게 한다.

1. 다음 빈칸에 알맞은 것을 써넣으시오.

θ / 삼각비	$30°$	$45°$	$60°$
$\sin\theta$			
$\cos\theta$			
$\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$			

2. 위의 1을 참고하여 다음 빈칸에 알맞은 것을 써넣으시오.

θ / 삼각비	$30°$	$45°$	$60°$
$\sin^2\theta+\cos^2\theta$			
$\tan\theta$			

3. 위의 1, 2를 비교하여 ㉮, ㉯, ㉰에 알맞은 것을 써넣으시오.

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta = \text{㉮}, \qquad \tan\theta = \frac{\text{㉯}}{\text{㉰}}$$

<해설>

(1)

θ / 삼각비	$30°$	$45°$	$60°$
$\sin\theta$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\theta$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

(2)

삼각비 \ θ	$30°$	$45°$	$60°$
$\sin^2\theta+\cos^2\theta$	1	1	1
$\tan\theta$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

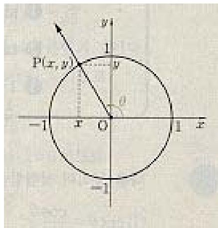
(3) ㉮ 1　　㉯ $\sin\theta$　　㉰ $\cos\theta$

[과제2] 단위원에서 삼각함수 사이의 관계 (천재교육 10-나 지도서 251쪽, 신현성 외)

- 목표 : 동경과 단위원과의 교점의 좌표를 이용하여 일반각의 삼각함수를 정의하였으므로 이 좌표를 이용하면 쉽게 삼각함수 사이의 관계식을 확인할 수 있다.

오른쪽 그림과 같이 각 θ의 동경과 단위원과의 교점을 $\mathrm{P}(x,\ y)$라고 할 때, 다음 물음에 답하여라.

1. $\sin\theta$, $\cos\theta$를 x, y로 나타내어라.
2. $\sin^2\theta+\cos^2\theta$을 직접 계산하여라.



<해설>

1. $\sin\theta=\frac{y}{1}=y$, $\cos\theta=\frac{x}{1}=x$
2. $\sin^2\theta+\cos^2\theta=y^2+x^2=\overline{\mathrm{OP}}^2=1$

개 념 정 리

삼각함수 사이의 관계

(1) $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$, $\cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

(2) $\mathrm{cosec}\,\theta=\frac{1}{\sin\theta}$, $\sec\theta=\frac{1}{\cos\theta}$, $\cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}$

(3) $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$, $1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$, $1+\cot^2\theta=\mathrm{cosec}^2\theta$

형 성 평 가

1. 각 θ가 제 3사분면의 각이고 $\cos\theta=-\frac{4}{5}$일 때, $\sin\theta$와 $\tan\theta$의 값을 각각 구하여라.

2. $\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{2}$ 일 때, 다음 식의 값을 구하여라.

(1) $\sin\theta\cos\theta$

(2) $\sin\theta-\cos\theta$

<풀이>

1. $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ 이므로

$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta$

$\therefore\ \sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\left(-\frac{4}{5}\right)^2=\frac{9}{25}$

θ는 제3사분면의 각이므로 $\sin\theta<0$

$\therefore\ \sin\theta=-\frac{3}{5}$

또, $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{-\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}}=\frac{3}{4}$

2. (1) 양변을 제곱하면 $(\sin\theta+\cos\theta)^2=\frac{1}{4}$

전개하면 $\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{4}$

그런데 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ 이므로 $\sin\theta\cos\theta=-\frac{3}{8}$

(2) $(\sin\theta-\cos\theta)^2=\sin^2\theta+\cos^2\theta-2\sin\theta\cos\theta$

$=1-2\left(-\frac{3}{8}\right)=\frac{7}{4}$

$\therefore\ \sin\theta-\cos\theta=\pm\frac{\sqrt{7}}{2}$

(3) 삼각함수의 성질

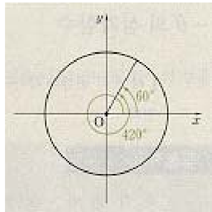
탐 구 활 동

[과제1] 동경이 일치하는 삼각함수의 값 (천재교육 10-나 지도서 255쪽, 신현성 외)

- 목표 : 일반각의 삼각함수는 동경과 단위원의 교점의 좌표를 이용하여 정의하므로 동경의 위치가 같으면 삼각함수의 값도 모두 같음을 알도록 한다.

오른쪽 그림을 보고 다음을 생각해 보아라.

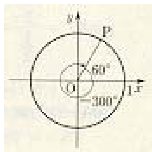
1. 각 $60°$와 $420°$의 동경의 위치는 일치하는가?
2. 각 $60°$와 $-300°$의 동경의 위치는 어떠한가?
3. 같은 동경을 갖는 두 각의 삼각함수의 값은 서로 같다고 할 수 있는가?



<해설>

일반각의 삼각함수는 동경과 단위원의 교점의 좌표를 이용하여 정의하므로 동경의 위치가 같으면 삼각함수의 값도 모두 같다.

1. $420° = 360° + 60°$이므로 $60°$와 $420°$의 동경은 일치한다.
2. $-300° = 360° \times (-1) + 60°$ 이므로 $60°$와 $-300°$의 동경은 일치한다.
3. 각 θ의 동경 OP에 대하여 단위원 위의 점 P의 좌표 $\mathrm{P}(x, y)$에서 삼각함수는 정의된다. 따라서, 같은 동경을 갖는 두 각의 삼각함수의 값은 서로 같다.



[과제2] 동굴에 설치할 전등의 높이 (두산 10-나 지도서 272쪽, 이재훈 외)

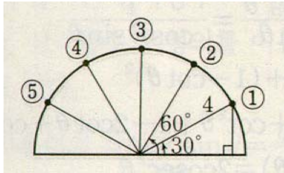
- 목표 : 삼각함수의 성질을 직관적으로 파악할 수 있게 한다.

단면이 반원 모양인 동굴 내부에 5개의 전등을 오른쪽 그림과 같이 반원을 6등분한 각 지점에 달려고 한다. 이때, 전등을 달아야 할 곳의 높이는 각각 얼마가 되는지 알아보아라.(단, 반원의 반지름의 길이는 $4\,\mathrm{m}$이고, 전등의 크기는 무시한다.)

<해설>

오른쪽의 그림에서 전구 ①의 높이는 $\sin 30°$를 이용하여 나타낼 수 있고 전구 ⑤의 높이도 $\sin 30°$를 이용하여 나타낼 수 있지만 $\sin 150°$로 나타낼 수도 있다. 곧, $\sin 30° = \sin 150°$임을 알 수 있다. 마찬가지로, $\sin 60° = \sin 120°$가 성립함을 주어진

그림의 전구의 높이를 통하여 이해할 수 있다.



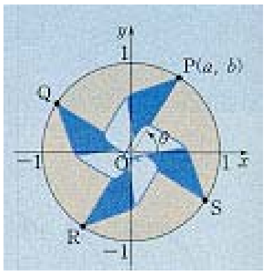
전구 ①, ⑤의 높이를 구하면 $4\sin 30^\circ = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2(\mathrm{m})$

전구 ②, ④의 높이를 구하면 $4\sin 60^\circ = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}(\mathrm{m})$

전구 ③의 높이를 구하면 $4\sin 90^\circ = 4 \cdot 1 = 4(\mathrm{m})$

[과제3] 바람개비를 이용한 삼각함수의 성질 (교학사 10-나 지도서 218쪽 박두일 외)

- 목표 : 점 P를 대칭이동하여 구한 점 Q, R, S를 이용하여 삼각함수의 값 사이의 관계를 이해하게 한다.



오른쪽 그림은 네 개의 날개가 서로 직각을 이루는 바람개비를 나타낸 것이다. 바람개비의 중심을 좌표평면의 원점 O, 날개의 끝점을 각각 P, Q, R, S라고 하자. 점 P의 좌표를 (a, b)라 하고, 동경 OP를 나타내는 각을 θ라고 할 때, 다음 물음에 답하여 보자.
1. θ에 대한 삼각함수의 값을 a, b로 나타내어 보아라.
2. 점 Q, R, S의 좌표를 구하여 보아라.
3. 동경 OQ, OR, OS가 나타내는 각에 대한 삼각함수의 값을 각각 a, b로 나타내어 보아라.

<**해설**>

1. $\sin\theta = b$, $\cos\theta = a$, $\tan\theta = \frac{b}{a}$
2. $\mathrm{Q}(-b, a)$, $\mathrm{R}(-a, -b)$, $\mathrm{S}(b, -a)$
3. 동경 OQ : $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = a$, $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = -b$, $\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = -\frac{a}{b}$

   동경 OR : $\sin(\pi+\theta) = -b$, $\cos(\pi+\theta) = -a$, $\tan(\pi+\theta) = \frac{b}{a}$

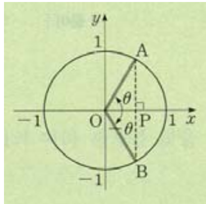
   동경 OS : $\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right) = -a$, $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right) = b$, $\tan\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right) = -\frac{a}{b}$

[과제4] 단위원에서 점의 회전 (대한교과서 10-나 지도서 223쪽, 박윤범 외)

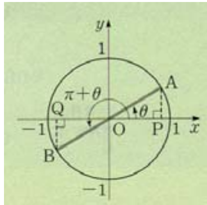
- 목표 : 직각 삼각형의 합동을 이용하여 단위원에서 각 $-\theta$, $\pi+\theta$, $\frac{\pi}{2}+\theta$를 나타내는 동경이 원과 만나는 점의 좌표와 각 θ를 나타내는 동경이 원과 만나는 점의 좌표 사이의 관계를 알 수 있도록 한다.

다음 물음에 답하여라.

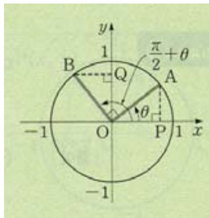
1. 오른쪽 그림에서 $\triangle$AOP 와 $\triangle$BOP 는 어떤 관계가 있는가?
   또, 점 A 의 좌표가 (x, y) 일 때, 점 B 의 좌표를 말하여라.



2. 오른쪽 그림에서 $\triangle$AOP 와 $\triangle$BOQ 는 어떤 관계가 있는가?
   또, 점 A 의 좌표가 (x, y) 일 때, 점 B 의 좌표를 말하여라.



3. 오른쪽 그림에서 $\triangle$AOP 와 $\triangle$BOQ 는 어떤 관계가 있는가?
   또, 점 A 의 좌표가 (x, y) 일 때, 점 B 의 좌표를 말하여라.



<해설>

1. $\triangle$AOP 와 $\triangle$BOP 에서 $\overline{OA} = \overline{OB}$, $\overline{OP}$ 는 공통,
   $\angle OPA = \angle OPB = 90°$ 이므로 $\triangle AOP \equiv \triangle BOP$
   따라서, 점 B 의 좌표는 $(x, -y)$

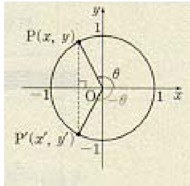
2. $\triangle$AOP 와 $\triangle$BOQ 에서 $\overline{OA} = \overline{OB}$,
   $\angle OPA = \angle OQB = 90°$, $\angle AOP = \angle BOQ = \theta$ 이므로 $\triangle AOP \equiv \triangle BOQ$
   따라서, 점 B 의 좌표는 $(-x, -y)$

3. $\triangle$AOP 와 $\triangle$BOQ 에서 $\overline{OA} = \overline{OB}$,
   $\angle OPA = \angle OQB = 90°$, $\angle AOP = \angle BOQ = \theta$ 이므로 $\triangle AOP \equiv \triangle BOQ$
   따라서, 점 B 의 좌표는 $(-y, x)$

[과제5] 단위원을 이용한 삼각함수의 성질(1) (지학사 10-나 지도서 266쪽, 이강섭 외)

- 목표 : 단위원과 각 θ의 동경과 각 $-\theta$의 동경은 x축에 대하여 대칭임을 이용하여 삼각함수의 성질을 이해한다.

각 θ와 $-\theta$를 나타내는 동경이 단위원과 만나는 점을 각각 $\mathrm{P}(x, y)$, $\mathrm{P}(x', y')$이라고 하면 P, P′은 x축에 대하여 대칭이므로, $x' = x$, $y' = -y$이다.



다음 $\square$ 안을 알맞게 채워 보자.

1. $\sin(-\theta) = y' = \square = -\sin\theta$
2. $\cos(-\theta) = x' = \square = \cos\theta$
3. $\tan(-\theta) = \dfrac{y'}{x'} = \square = -\tan\theta$

<해설>

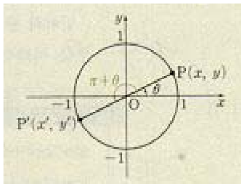
$\sin\theta = y$, $\cos\theta = x$, $\tan\theta = \dfrac{y}{x}$ 이고, 점 P, P′은 서로 x축에 대하여 대칭임을 이용한다.

1. $-y$ 2. x 3. $-\dfrac{y}{x}$

[과제6] 단위원을 이용한 삼각함수의 성질(2) (지학사 10-나 지도서 268쪽, 이강섭 외)

- 목표 : 각 θ의 동경과 각 $\pi+\theta$의 동경은 원점에 대하여 대칭임을 이용하여 삼각함수의 성질을 이해한다.

각 θ와 $\pi+\theta$를 나타내는 동경이 단위원고 만나는 점을 각각 $\mathrm{P}(x, y)$, $\mathrm{P}(x', y')$이라고 하면 P, P′은 원점에 대하여 대칭이므로, $x' = -x$, $y' = -y$이다.



다음 $\square$ 안을 알맞게 채워 보자.

1. $\sin(\pi+\theta) = y' = \square = -\sin\theta$
2. $\cos(\pi+\theta) = x' = \square = -\cos\theta$
3. $\tan(\pi+\theta) = \dfrac{y'}{x'} = \square = \tan\theta$

위의 등식에 θ대신 $-\theta$를 대입하면

4. $\sin(\pi-\theta) = \square = \sin\theta$
5. $\cos(\pi-\theta) = \square = -\cos\theta$
6. $\tan(\pi-\theta) = \square = -\tan\theta$

<해설>

$\sin\theta = y,\ \ \cos\theta = x,\ \ \tan\theta = \dfrac{y}{x}$ 이고 점 P, P′은 서로 원점에 대하여 대칭임을 이용한다.

1. $-y$ 2. $-x$ 3. $\dfrac{y}{x}$

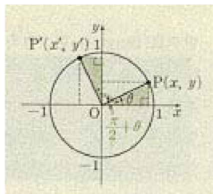
4. $-\sin(-\theta)$ 5. $-\cos(-\theta)$ 6. $\tan(-\theta)$

[과제7] 단위원을 이용한 삼각함수의 성질(3) (지학사 10-나 지도서 269쪽, 이강섭 외)

● 목표 : 각 θ의 동경과 각 $\dfrac{\pi}{2}\pm\theta$의 동경이 서로 수직임을 이용하여 삼각함수의 성질을 이해한다.

각 θ와 $\dfrac{\pi}{2}+\theta$를 나타내는 동경이 단위원과 만나는 점을 각각 $\mathrm{P}(x,\ y)$, $\mathrm{P}(x',\ y')$이라고 하면 삼각형의 합동조건에 의하여 $x' = -y$, $y' = x$이다.

다음 $\square$ 안을 알맞게 채워 보자.



1. $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right) = y' = \square = \cos\theta$

2. $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right) = x' = \square = -\sin\theta$

3. $\tan\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right) = \dfrac{y'}{x'} = \square = -\cot\theta$

위의 등식에 θ대신 $-\theta$를 대입하면

4. $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right) = \square = \cos\theta$

5. $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right) = \square = \sin\theta$

6. $\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right) = \square = \cot\theta$

<해설>

$\sin\theta = y,\ \ \cos\theta = x,\ \ \tan\theta = \dfrac{y}{x}$ 이고 합동인 두 삼각형의 성질을 이용하도록 한다.

1. x 2. $-y$ 3. $-\dfrac{x}{y}$

4. $\cos(-\theta)$ 5. $-\sin(-\theta)$ 6. $-\cot(-\theta)$

개념정리

삼각함수의 성질(단, n은 정수, 복호동순)

(1) $\sin(2n\pi+\theta)=\sin\theta,\ \ \cos(2n\pi+\theta)=\cos\theta,\ \ \tan(2n\pi+\theta)=\tan\theta$

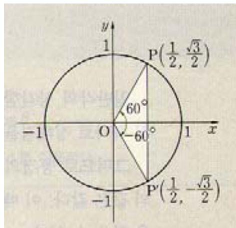
(2) $\sin(-\theta)=-\sin\theta,\ \ \cos(-\theta)=\cos\theta,\ \ \tan(-\theta)=-\tan\theta$

(3) $\sin(\pi\pm\theta)=\mp\sin\theta,\ \ \cos(\pi\pm\theta)=\mp\cos\theta,\ \ \tan(\pi\pm\theta)=\pm\tan\theta$

(4) $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\pm\theta\right)=\cos\theta,\ \ \cos\left(\dfrac{\pi}{2}\pm\theta\right)=\mp\sin\theta,\ \ \tan\left(\dfrac{\pi}{2}\pm\theta\right)=\mp\cot\theta$

형성평가

1. 두 각 $60°$와 $-60°$의 동경과 단위원의 교점을 각각 P, P′이라 할 때, 다음 물음에 답하여라.

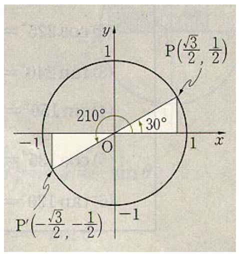


(1) $\sin(-60°)$의 값과 $\sin 60°$의 값을 비교하여라.

(2) $\cos(-60°)$의 값과 $\cos 60°$의 값을 비교하여라.

(3) $\tan(-60°)$의 값과 $\tan 60°$의 값을 비교하여라.

2. 두 각 $30°$와 $210°$의 동경과 단위원의 교점을 각각 P, P′이라 할 때, 다음 물음에 답하여라.

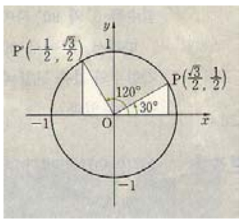


(1) $\sin 30°$와 $\sin 210°$의 값을 비교하여라.

(2) $\cos 30°$와 $\cos 210°$의 값을 비교하여라.

(3) $\tan 30°$와 $\tan 210°$의 값을 비교하여라.

3. 두 각 $30°$와 $120°$의 동경과 단위원의 교점을 각각 P, P′이라 할 때, 다음 물음에 답하여라.



(1) $\sin 120°$와 $\cos 30°$의 값을 비교하여라.

(2) $\cos 120°$와 $\sin 30°$의 값을 비교하여라.

(3) $\tan 120°$와 $\cot 30°$의 값을 비교하여라.

4. $\cos 20°=0.9397$, $\tan 15°=0.2679$임을 이용하여 다음 값을 구하여라.

(1) $\sin 110°$

(2) $\tan\dfrac{11}{12}\pi$

<풀이>

1. 두 각 $60°$, $-60°$의 두 동경이 x축에 대하여 대칭임을 알고, 단위원과 두 각 $60°$, $-60°$의 동경의 두 교점의 좌표를 이용하여 $60°$, $-60°$의 삼각함수를 구한다.

(1) $\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin(-60°) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad\therefore \sin(-60°) = -\sin 60°$

(2) $\cos 60° = \frac{1}{2}$, $\cos(-60°) = \frac{1}{2}$ $\quad\therefore \cos(-60°) = \cos 60°$

(3) $\tan 60° = \sqrt{3}$, $\tan(-60°) = -\sqrt{3}$ $\quad\therefore \tan(-60°) = -\tan 60°$

2. 두 각 $30°$와 $210°$의 동경이 원점에 대하여 대칭임을 알고, 단위원과 두 각 $30°$와 $210°$의 동경의 교점을 이용하여 $30°$와 $210°$의 삼각함수를 구하고 비교한다.

(1) $\sin 30° = \frac{1}{2}$, $\sin 210° = -\frac{1}{2}$ $\quad\therefore \sin 210° = \sin(180° + 30°) = -\sin 30°$

(2) $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 210° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad\therefore \cos 210° = \cos(180° + 30°) = -\cos 30°$

(3) $\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\tan 210° = \frac{1}{\sqrt{3}}$ $\quad\therefore \tan 210° = \tan(180° + 30°) = \tan 30°$

3. 두 각 $30°$와 $120°$의 동경이 서로 수직임을 알고, 단위원과 두 각 $30°$와 $120°$의 동경의 교점을 이용하여 $30°$와 $120°$의 삼각함수를 구하고 비교한다.

(1) $\sin 120° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad\therefore \sin 120° = \sin(90° + 30°) = \cos 30°$

(2) $\cos 120° = -\frac{1}{2}$, $\sin 30° = \frac{1}{2}$ $\quad\therefore \cos 120° = \cos(90° + 30°) = -\sin 30°$

(3) $\tan 120° = -\sqrt{3}$, $\cot 30° = \sqrt{3}$ $\quad\therefore \tan 120° = \tan(90° + 30°) = -\cot 30°$

4. (1) $\sin 110° = \sin(90° + 20°) = \cos 20° = 0.9397$

(2) $\tan \frac{11}{12}\pi = \tan\left(\pi - \frac{\pi}{12}\right) = -\tan\frac{\pi}{12} = -0.2679$

3 삼각함수의 그래프

학습목표

- 삼각함수의 성질을 이용하여 그래프를 그릴 수 있다.
- 삼각함수의 그래프의 성질을 이해한다.

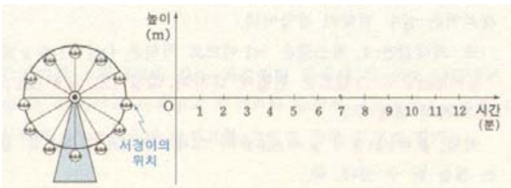
(1) $y=\sin\theta$, $y=\cos\theta$ 의 그래프

탐 구 활 동

[과제1] 놀이기구의 높이와 시간의 관계 (고려출판 10-나 지도서 227쪽, 최상기 외)

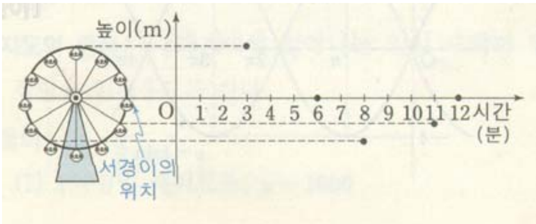
- 목표 : 실생활에서 회전각을 나타낼 때, 360°가 넘는 각이 필요함을 알게 하고 이를 일반각의 개념으로 자연스럽게 연관지을 수 있도록 한다.

서경이는 다음 그림과 같이 지름이 20m인 원형의 놀이기구를 타려고 한다. 놀이기구가 한 바퀴 도는 데 12분이 걸린다면 지금 위치를 0으로 보았을 때, 3, 6, 8, 11, 12분 후의 높이를 다음 좌표평면 위에 나타내어라.



<해설>

실생활 문제에서 주기함수를 생각하게 하고, 각 시간에 따른 서경이의 위치를 나타내봄으로써 사인의 그래프를 도입하기 위한 것이다.

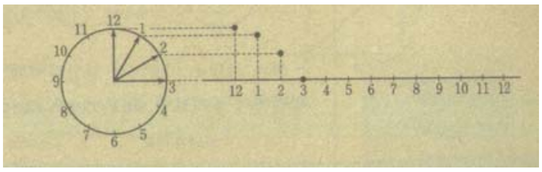


[과제2] 삼각함수의 그래프

● 목표 : 생활 주변에서 주기적으로 변하는 것을 관찰하여 그림으로 나타냄으로써 삼각함수의 그래프를 그리는 방법을 이해한다.

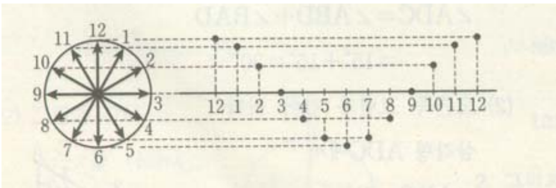
활동1 : 시계의 시침이 그리는 눈금 (교학사 10-나 지도서 216쪽, 박규홍 외)

아래 그림은 시계의 분침의 위치와 분침이 가리키는 눈금 사이의 관계를 나타낸 그래프의 일부이다. 그래프를 완성하여라.



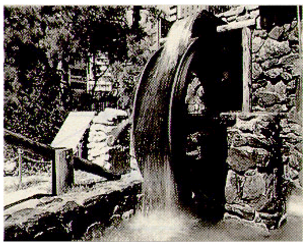
<해설>

9 시와 3 시를 잇는 직선에서 각 시간까지의 높이와 방향을 구해 보면 12 시와 6 시가 반대 방향으로 높이가 같고, 1 시와 11 시가 같은 방향으로, 1 시와 5 시, 7 시는 반대 방향으로 높이가 같고, 2 시와 10 시가 같은 방향으로, 2 시와 4 시, 8 시는 반대 방향으로 높이가 같다.

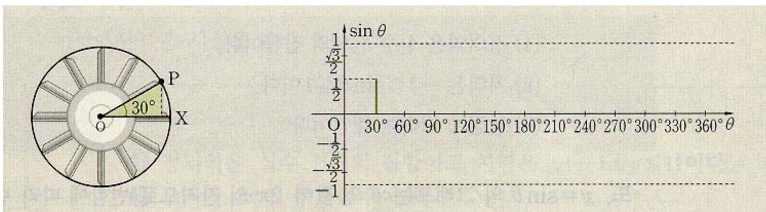


활동2 : 물레방아의 날개와 삼각함수의 그래프 (천재교육 10-나 지도서 261쪽, 신현성 외)

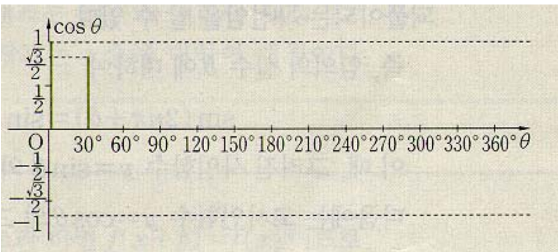
오른쪽 그림은 물레방아이다. 물레방아의 각 날개가 $\overline{OX}$을 기준으로 $30°$, $60°$, $90°$, $120°$ $\cdots$, 즉 $30°$ 간격으로 있을 때, 물레방아를 원으로, 물레방아의 중심 O와 각 날개의 끝을 이은 선분을 동경으로 생각하고 다음 물음에 답하여라.



1. 각 날개에서 얻어지는 사인값을 아래 좌표평면 위에 선분으로 나타내어라.



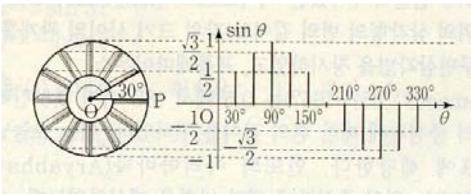
2. 위와 마찬가지로 코사인값에 대해서도 아래 좌표평면 위에 선로 나타내어라.



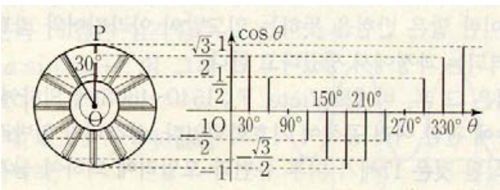
<해설>

각 θ를 나타내는 동경과 단위원과의 교점이 $P(x, y)$이면 $\sin\theta = y$, $\cos\theta = x$이므로 일반각의 사인과 코사인은 각각 교점 P의 y좌표와 x좌표로 정해진다.

1.



2.



[과제3] $y = \sin\theta$, $y = \cos\theta$ 의 그래프 그리기

- 목표 : 자바 그래픽 도구를 이용하여 삼각함수의 그래프를 구할 수 있다.

1. 다음 삼각함수의 그래프를 그려보고 비교하여 보아라. (그래프그리미)

(1) $y = \sin x$, $y = \cos x$

(2) $y = \sin x$, $y = \sin 2x$, $y = \sin \frac{1}{2} x$

(3) $y = \cos x$, $y = \cos 2x$, $y = \cos \frac{1}{2} x$

(4) $y = \sin x$, $y = 2\sin x$, $y = \frac{1}{2} \sin x$

(5) $y = \cos x$, $y = 2\cos x$, $y = \frac{1}{2} \cos x$

2. a, b, c 가 변할 때, 다음 삼각함수의 그래프를 그려보고 비교하여 보아라.

(그래프그리미)

(1) $y = a\sin x$

(2) $y = \sin ax$

(3) $y = \sin x + a$

(4) $y = \sin(ax + b) + c$

(5) $y = a\sin bx + c$

3. a, b, c 가 변할 때, 다음 삼각함수의 그래프를 그려보고 비교하여 보아라.

(그래프그리미)

(1) $y = a\cos x$

(2) $y = \cos ax$

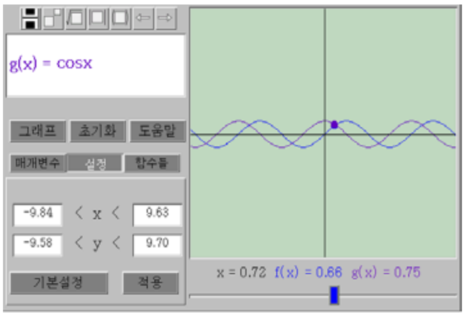
(3) $y = \cos x + a$

(4) $y = \cos(ax + b) + c$

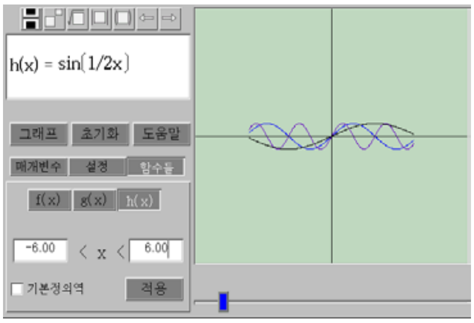
(5) $y = a\cos bx + c$

<해설>

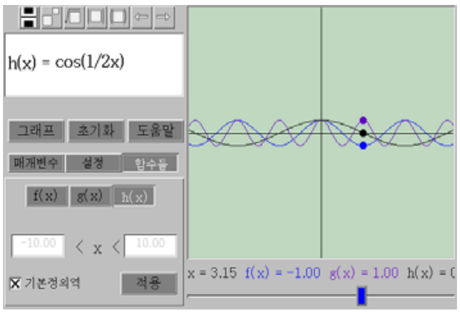
1. (1)



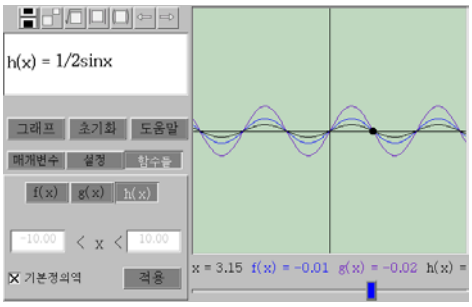
(2)

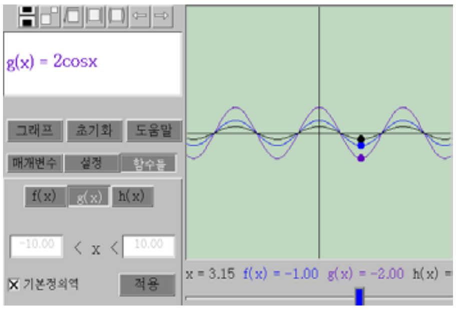


(3)

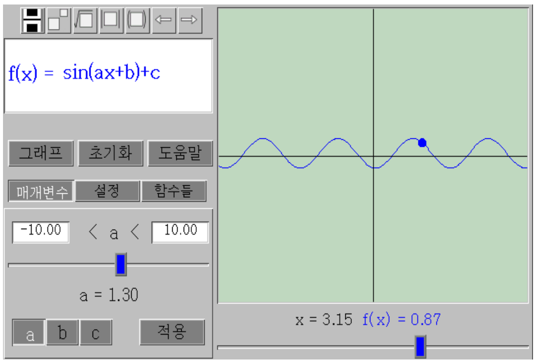


(4)

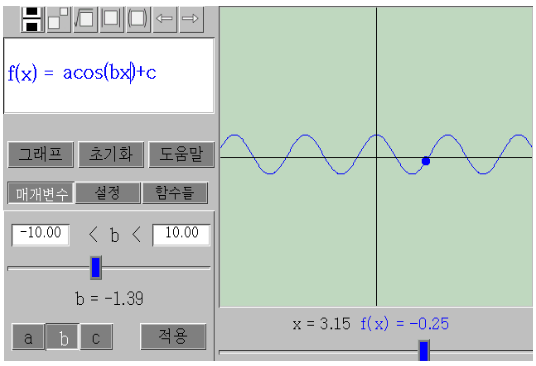


(5) 

2. $y=\sin(ax+b)+c$ 의 그래프는 $|a|$가 커질 때 그래프의 폭이 좁아져 주기가 작아지며 b가 변하면 x축의 방향으로 c가 변하면 y축의 방향으로 평행이동한다.



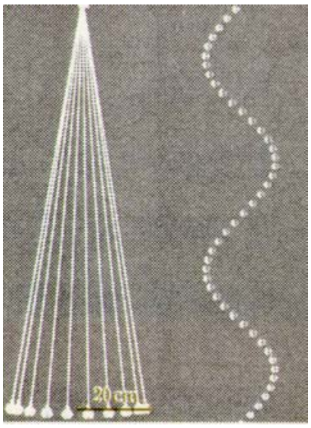
3. $y=a\cos bx+c$ 의 그래프는 $|a|$가 커지면 진폭이 커져 그래프의 위 아래의 폭이 커지고 $|b|$가 커지면 그래프의 폭이 좁아져 주기가 작아지며 c가 변하면 y축의 방향으로 평행이동한다.



[과제4] 주기현상과 삼각함수의 그래프 (천재교육 10-나 지도서 246쪽, 이방수 외)

● 목표 : 실생활에서 주기성을 갖는 현상을 찾아보고, 삼각함수의 그래프와 관련지어 최대값과 최소값, 주기를 구할 수 있게 한다.

오른쪽 그림과 같이 추가 4초 주기로 움직일 때, 움직인 시간을 x라 하고, 추의 중심선으로부터 추까지의 거리를 y라 놓자. y는 오른쪽으로 움직일 때는 양의 값으로, 왼쪽으로 움직일 때는 음의 값으로 정한다.



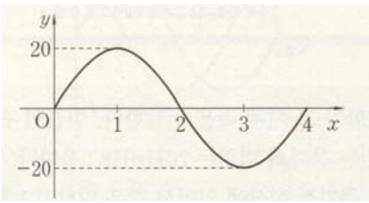
1. x, y의 관계를 (x, y) 좌표평면 위에 나타내어라.(단, 처음 추는 중심선에서 오른쪽으로 움직인다.)

2. 위에서 얻은 함수의 그래프의 최대값, 최소값, 주기를 구하여라.

3. 함수의 그래프의 주기를 변화시키려면 어떻게 하면 되는가?

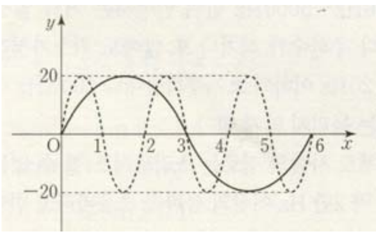
<해설>

1. x, y의 관계를 좌표평면에 나타내어 그래프를 그리면 다음과 같다.



2. (물음1)에서 구한 함수의 그래프로부터 최대값은 20, 최소값은 -20, 주기는 4초이다.

3. 추의 움직임의 속도를 다르게 하면 함수의 그래프의 주기를 변화시킬 수 있다. 주기를 크게 하면 움직이는 속도는 작아지고, 주기를 작게 하면 움직이는 속도는 빨라진다. 이를테면 주기가 4초인 경우에 대하여 2초, 6초의 경우는 다음과 같다.



개념정리

삼각함수의 그래프

(1) $y=\sin x$, $y=\cos x$ 의 그래프의 성질

① 정의역{ x | x 는 실수}

② 치역{ x | $-1\leq x\leq 1$ }

③ 주기가 2π 인 주기함수이다.

④ $y=\sin x$ 의 그래프는 원점에 대하여 대칭이고, $y=\cos x$ 의 그래프는 y 축에 대하여 대칭이다.

(2) $y=a\sin(bx+c)+d \quad (a>0)$ 의 그래프의 성질

① 주기 : $\dfrac{2\pi}{|b|}$

② 최대값 : $a+d$, 최소값 : $-a+d$

③ $y=a\sin x$ 의 그래프를 x 축으로 $-\dfrac{c}{b}$, y 축으로 d 만큼 평행이동

(3) $y=a\cos(bx+c)+d \quad (a>0)$ 의 그래프의 성질도 위의 사인곡선의 성질과 같다.

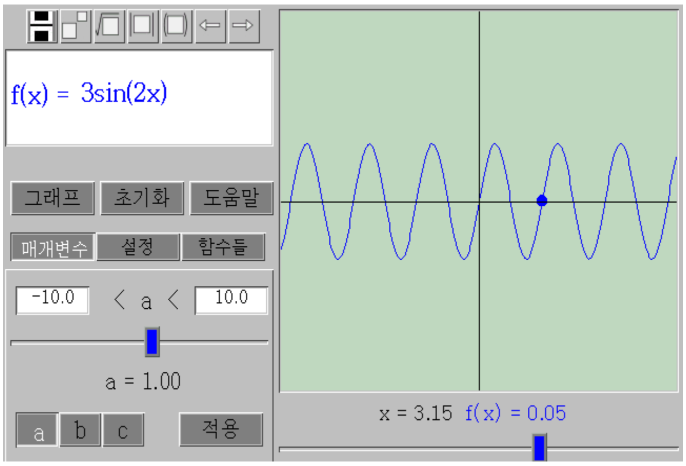
형성평가

1. 다음 삼각함수의 그래프를 그리고, 그 주기와 최대값, 최소값을 구하여라.(그래프그리미)

(1) $y=3\sin 2x$　　　　(2) $y=3\cos 2x+1$

<풀이>

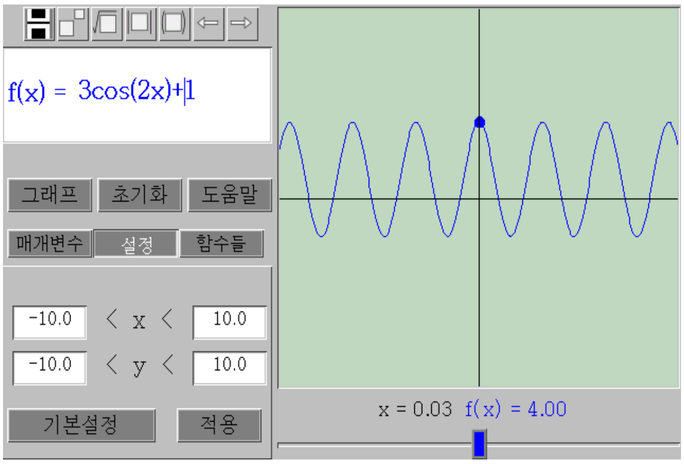
1. (1)



$3\sin 2x=3\sin(2x+2\pi)=3\sin 2(x+\pi)$ 이므로 **주기는** π

$-3\leq 3\sin 2x\leq 3$ 이므로 **최대값은** 3 , **최소값은** -3

(2)



주기는 $\frac{2\pi}{2}=\pi$

$-3\leq 3\cos 2x\leq 3$ 이므로 $-2\leq 3\cos 2x+1\leq 4$

$\therefore$ **최대값은** 4, **최소값은** -2

(2) $y=\tan\theta$의 그래프

탐구활동

[과제1] $y=\tan\theta$의 그래프 그리기

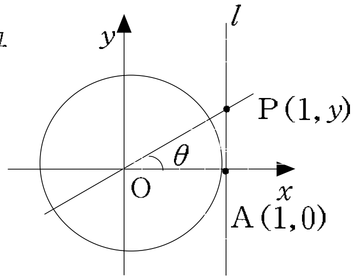
- 목표 : $y=\tan\theta$ 의 그래프를 그리는 원리를 이해하고 그 그래프를 그릴 수 있다.

각 θ 에 대한 동경과 단위원 위의 점 $\mathrm{A}(1,0)$ 에서의 접선 l 과의 교점을 $\mathrm{P}(1,y)$ 라 하면 $\tan\theta=y$ 이다.

1. 그래프그리미를 이용하여 $y=\tan x$ 의 그래프를 그려 보아라.

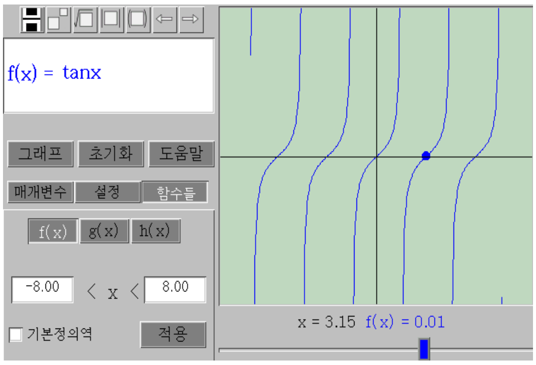
2. $y=\tan x$ 의 정의역을 구하여라.

3. $y=\tan x$ 의 주기를 구하여라.



<해설>

1.



2. 위의 그래프를 보면, x의 값이 $n\pi+\frac{\pi}{2}$의 왼쪽에서 가까워지면 $\tan x$의 값은 양수로 한없이 커져가고 오른쪽에서 가까워지면 음수로 그 절대값이 한없이 커져감을 알 수 있다. 따라서 $\theta=n\pi+\frac{\pi}{2}$ 일 때 $\tan x$의 값은 정의되지 않는다.

∴ 정의역은 $x\neq n\pi+\frac{\pi}{2}$ (단, n은 정수)

이 때, $\theta=n\pi+\frac{\pi}{2}$는 $y=\tan x$ 의 점근선이다.

3. $\tan(x+\pi)=\tan x$이므로 $y=\tan x$의 주기는 π

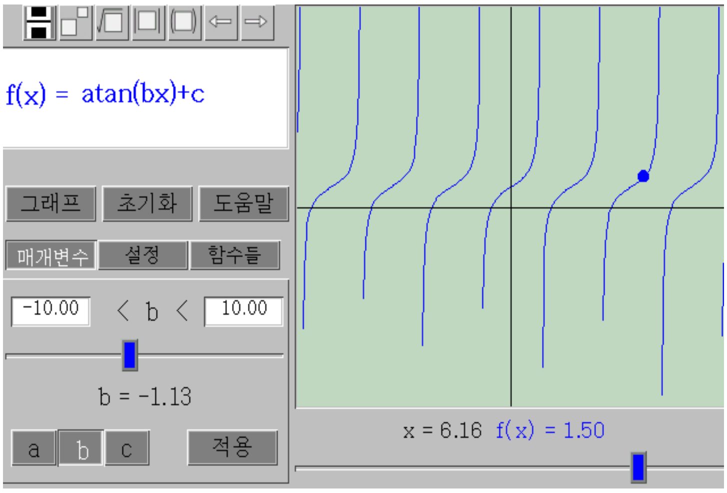
[과제2] $y=a\tan bx+c$ 의 그래프 그리기

- 목표 : 자바 그래픽 도구를 이용하여 $y=a\tan bx+c$ 의 그래프를 그릴 수 있다.

a, b, c가 변할 때, $y=a\tan bx+c$ 의 그래프가 어떻게 변하는지 관찰하여 보아라. (그래프그리미)

<해설>

$y=a\tan bx+c$ 의 그래프는 $|a|$가 커지면 거의 직선형태로 변하며 $|b|$가 커지면 그래프의 폭이 좁아져 주기가 작아지며 c가 변하면 y축의 방향으로 평행이동한다.



개념정리

$y=\tan x$ 의 그래프

① 정의역 $\left\{x \mid x \neq \frac{\pi}{2}+n\pi\ (n\text{은 정수})\right\}$

② 치역 $\{x \mid x$ 는 실수$\}$

③ 주기가 π 인 주기함수이다.

④ $y=\tan x$ 의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

⑤ 점근선은 직선 $x=\frac{\pi}{2}+n\pi$ (n은 정수)

형성평가

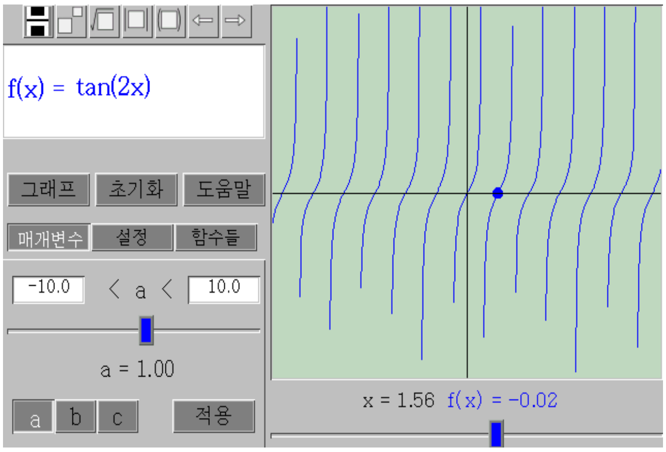
1. 다음 삼각함수의 그래프와 점근선, 주기를 구하여라. (그래프 그리미)

(1) $y=\tan 2x$

(2) $y=3\tan\frac{x}{2}$

<풀이>

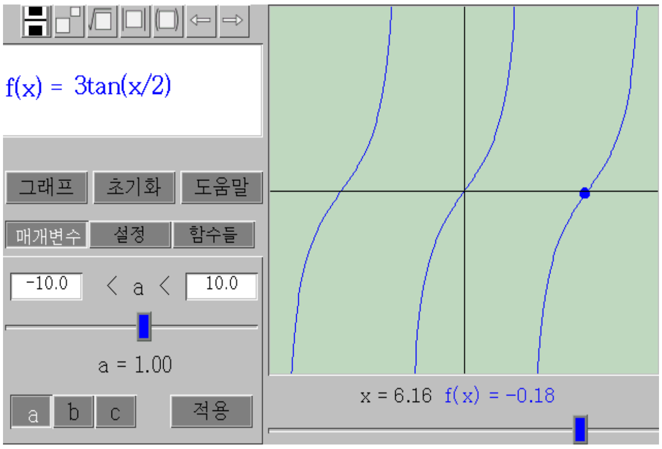
1. (1)



$2x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \cdots$ 에서 **점근선의 방정식은** $x=\frac{\pi}{4}, x=\frac{3\pi}{4}, x=\frac{5\pi}{4}, \cdots$

$\tan 2x = \tan(2x+\pi) = \tan 2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ 이므로 주기는 $\frac{\pi}{2}$

(2)



$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \cdots$ 에서 **점근선의 방정식은** $x=\pi, x=3\pi, x=5\pi, \cdots$

$3\tan\frac{x}{2} = 3\tan\left(\frac{x}{2}+\pi\right) = 3\tan\frac{1}{2}(x+2\pi)$ 이므로 주기는 2π

4 삼각방정식과 부등식

학습목표

- 삼각함수의 그래프를 이용하여 간단한 방정식을 풀 수 있다.
- 삼각함수의 그래프를 이용하여 간단한 부등식을 풀 수 있다.

탐 구 활 동

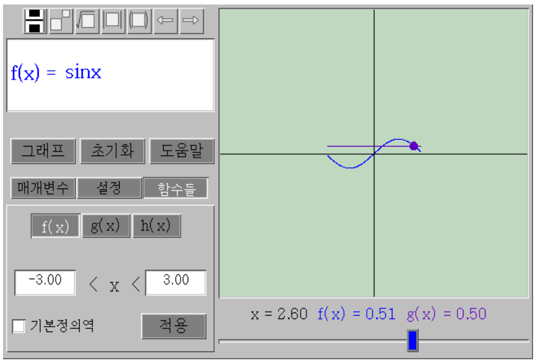
[과제1] 삼각방정식 $\sin x = a$ 의 해 구하기

- 목표 : 삼각함수의 그래프를 이용하여 $\sin x = a$의 해를 구할 수 있다

1. $y=\sin x,\ y=\dfrac{1}{2}\ (-3 \leq x \leq 3)$의 그래프를 동시에 그려 보아라.(그래프그리미)
2. 위의 그래프를 이용하여 $\sin x = \dfrac{1}{2}\ (-3 \leq x \leq 3)$의 해를 구하여라.

<해설>

1.



2. 위의 그림에서 두 그래프가 만나는 x의 값을 관찰하면 $x \fallingdotseq 0.52,\ x \fallingdotseq 2.60$이다.

이것은 $\sin x = \dfrac{1}{2}\ (-3 \leq x \leq 3)$의 해가 $x = \dfrac{\pi}{6},\ x = \dfrac{5\pi}{6}$ 임을 의미한다.

[과제2] 삼각방정식 $\cos x = a$ 의 해 구하기

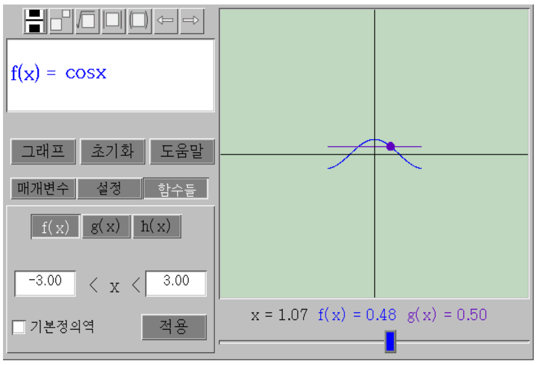
- 목표 : 삼각함수의 그래프를 이용하여 $\cos x = a$ 의 해를 구할 수 있다

1. $y=\cos x,\ y=\dfrac{1}{2}\ (-3 \leq x \leq 3)$의 그래프를 동시에 그려 보아라.(그래프그리미)

2. 위의 그래프를 이용하여 $\cos x = \frac{1}{2}\,(-3 \leqq x \leqq 3)$의 해를 구하여라.

<해설>

1.



2. 위의 그림에서 두 그래프가 만나는 x의 값을 관찰하면 $x \fallingdotseq -1.07$, $x \fallingdotseq 1.07$이다.

이것은 $\cos x = \frac{1}{2}\,(-3 \leqq x \leqq 3)$의 해가 $x = -\frac{\pi}{3}$, $x = \frac{\pi}{3}$ 임을 의미한다.

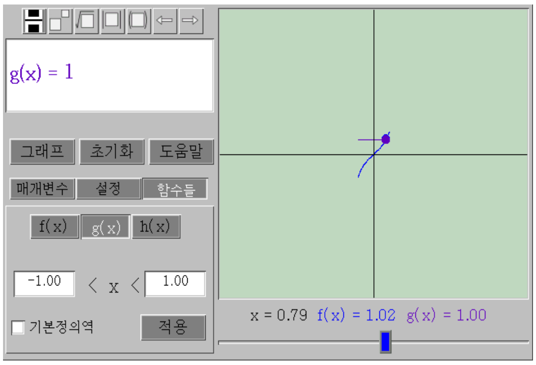
[과제3] 삼각방정식 $\tan x = a$의 해 구하기

● 목표 : 삼각함수의 그래프를 이용하여 $\tan x = a$의 해를 구할 수 있다

1. $y = \tan x$, $y = 1\,(-1 \leqq x \leqq 1)$의 그래프를 동시에 그려 보아라.(그래프그리미) 2. 위의 그래프를 이용하여 $\tan x = 1\,(-1 \leqq x \leqq 1)$의 해를 구하여라.

<해설>

1.



2. 위의 그림에서 두 그래프가 만나는 x의 값을 관찰하면 $x \fallingdotseq 0.79$이다.

이것은 $\tan x = 1\,(-1 \leqq x \leqq 1)$의 해가 $x = \frac{\pi}{4}$ 임을 의미한다.

[과제4] 삼각부등식의 해 구하기

- 목표 : 삼각함수의 그래프를 이용하여 삼각부등식의 해를 구할 수 있다.

다음 삼각부등식의 해를 구하여라.(그래프그리미)

1. $\sin x \leqq \frac{1}{2} \,(0 \leqq x \leqq 2\pi)$
2. $\cos x > -\frac{1}{2} \,(0 \leqq x \leqq 2\pi)$
3. $\tan x \leqq 1 \,(0 \leqq x \leqq 2\pi)$

<해설>

1. $y=\sin x$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2}$의 그래프를 아래의 <그림1>과 같이 그려서 교점을 찾으면 $x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5\pi}{6}$이다. 따라서 구하는 해는 $y=\sin x$의 그래프가 $y=\frac{1}{2}$의 그래프보다 아래에 있는 x의 범위가 구하는 부등식의 해이다.

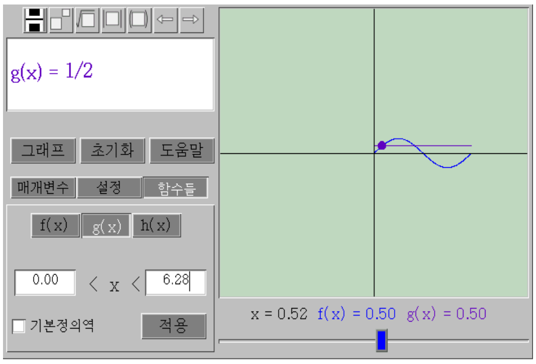
   즉, 구하는 해는 $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6} \leqq x \leqq 2\pi$

2. $y=\cos x$의 그래프와 직선 $y=-\frac{1}{2}$의 그래프를 아래의 <그림2>와 같이 그려서 교점을 찾으면 $x=\frac{2\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{4\pi}{3}$이다. 따라서 구하는 해는 $y=\cos x$의 그래프가 $y=-\frac{1}{2}$의 그래프 보다 위에 있는 x의 범위가 구하는 부등식의 해이다.

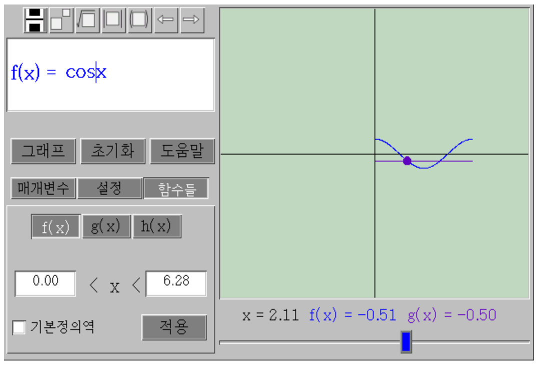
   즉, 구하는 해는 $0 \leqq x < \frac{2\pi}{3}$ 또는 $\frac{4\pi}{3} < x \leqq 2\pi$

3. $y=\tan x$의 그래프와 직선 $y=1$의 그래프를 아래의 <그림3>과 같이 그려서 교점을 찾으면 $x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{5}{4}\pi$이다. 따라서 구하는 해는 $y=\tan x$의 그래프가 $y=1$의 그래프 보다 아래에 있는 x의 범위가 구하는 부등식의 해이다.

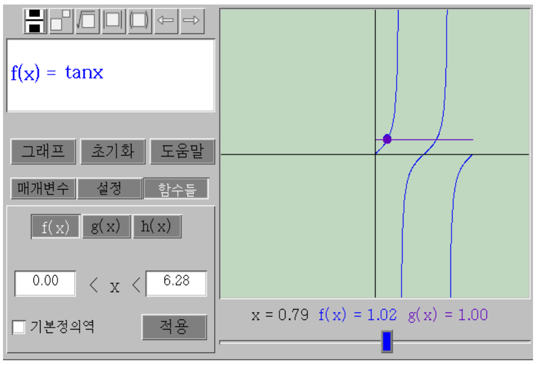
   즉, 구하는 해는 $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{4}$ 또는 $\frac{\pi}{2} < x \leqq \frac{5\pi}{4}$ 또는 $\frac{3\pi}{2} < x \leqq 2\pi$



<그림1>



<그림2>



<그림3>

개념정리

1. 삼각방정식의 풀이

(1) 방정식 $\sin\theta = a\ (-1 \leq a \leq 1)$ **의 풀이**

$y = \sin\theta$와 직선 $y = a$ 의 그래프를 그려서 교점의 θ 좌표를 구한다.

(2) 방정식 $\cos\theta = a\ (-1 \leq a \leq 1)$**의 풀이**

$y = \cos\theta$와 직선 $y = a$ 의 그래프를 그려서 교점의 θ 좌표를 구한다.

(3) 방정식 $\tan\theta = a$ **의 풀이**

$y = \tan\theta$와 직선 $y = a$ 의 그래프를 그려서 교점의 θ 좌표를 구한다.

2. 삼각부등식의 풀이

위의 삼각방정식의 풀이 방법과 같이 해결한다.

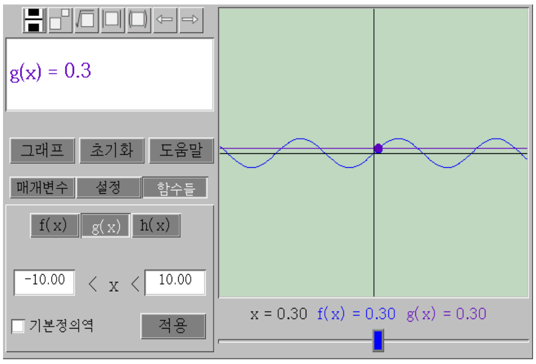
형 성 평 가

1. 그래프그리미를 이용하여 다음 방정식과 부등식의 해를 근사적으로 구하여라. ($-10 \le x \le 10$)

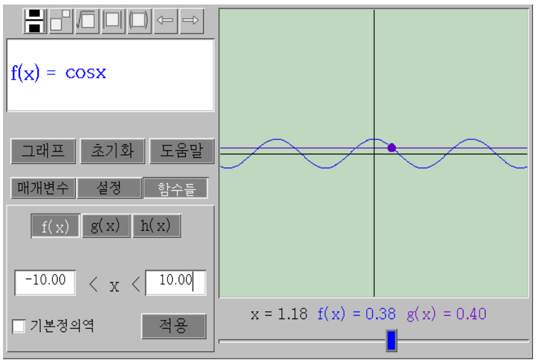
(1) $\sin x = 0.3$ (2) $\cos x = 0.4$ (3) $\tan x > 2$

<풀이>그래프그리미를 이용하면 아래 그림과 같은 삼각함수와 직선의 그래프를 얻을 수 있다. 이때, 삼각함수의 그래프와 직선과의 교점을 조사해 보면 해의 근사값을 구할 수 있게 된다.

1. (1)



(2)



(3)