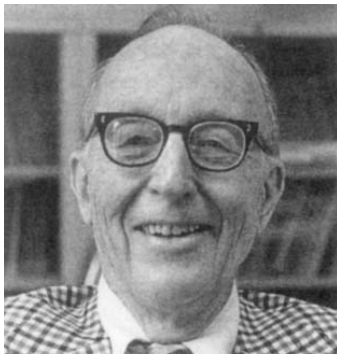
Lecture Note by Sang-Gu Lee

성균관대학교 선형대수학 연구실 Matrixtopia 2008

제7장 선형 대수학

- Revised version by Sang-Gu Lee, 2009



Mathematics;
Form and Function

by

Saunders Mac Lane

THE UNIVERSITY OF CHICAGO, DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Springer-Verlag, New York Inc. 1986.

수학;
형식과 기능

역자: 이상구, 곽영직, 권기호, 한태식, 오채환

청음사, 서울·수원 2001

제7장 선형 대수학

- 2008 Revised version by Sang-Gu LEE

평면 기하학의 대수적인 접근은 제4장 7절에서 다룬 바와 같이 **실수체 $\mathbb{R}$상에서의 2차원 벡터공간으로** 우리를 인도했고, **미분에서 그레디언트(gradient)와 접선은 코탄젠트와 탄젠트 벡터공간**에 이르도록 했다. **물리학에서는 3차원 벡터공간은 가장 널리 취급하는 반면, 벡터 대수는 3차원 이상의 기하학적 개념을 효과적으로 다루는 방법을 제공한다.** 그런가 하면 **해석학에서는 L^2와 같은 무한차원 벡터공간을 다룬다**(제6장 11절). 이 장에서는 위의 모든 벡터공간을 아우르는 임의의 체(field)상에서의 벡터공간의 여러 가지 성질을 정리해 보고자 한다.

1. 선형성의 근원

어떤 효과(effect)가 '선형적이다' 라고 말하는 것은 그 효과가 비례의 관계가 있다는 것과, 전체 효과는 부분 효과의 합으로 나타내진다는 것을 뜻한다. 선형성에 대한 설명은 제4장 7절의 선형 벡터 공간을 정의할 때 이미 했었다. 스칼라들의 체 F상에서의 집합 $V=\{(a_1,a_2,\ldots,a_n):a_i\in F\}$에 아래 두 개의 연산(하나는 덧셈 $(\mathrm{v},\mathrm{w})\mapsto \mathrm{v}+\mathrm{w}$, 그리고 다른 하나는 벡터 v에 스칼라 $a\in F$를 곱하는 곱셈)이 정의되고 이 연산들과 함께 V의 성분들이 2개의 기본 조건과 8가지의 연산법칙을 만족하면 V가 주어진 벡터 addition + 및 sclar 배 연산 $\cdot$ 과 함께 **벡터 공간**을 이룬다고 하고 $(V,+,\cdot)$를 벡터공간이라고 하며 그 안의 원소를 **벡터**라고 한다. 공리로부터 이 벡터들은 덧셈과 함께 아벨군을 형성하고 벡터에 스칼라를 곱하는 곱셈(스칼라 곱)은 아래 식을 만족한다.

$$a(\mathrm{v}+\mathrm{w}) = a\mathrm{v}+a\mathrm{w},\ 1\mathrm{v}=\mathrm{v} \qquad (1)$$
$$(a+b)\mathrm{v}=a\mathrm{v}+b\mathrm{v},\ (ab)\mathrm{v}=a(b\mathrm{v}) \qquad (2)$$

이 식에서 v와 w는 공간 V에 속하는 벡터이고 $a,\ b$는 체 F에 속하는 스칼라이다. 벡터 덧셈과 스칼라 곱셈은 다음 식과 같이 F에 속하는 스칼라 계수 a_i와 공간 V에 속하는 벡터 v_i의 좀 더 일반적인 **일차결합**으로 나타낼 수 있다.

$$a_1\mathrm{v}_1+a_2\mathrm{v}_2+\cdots+a_n\mathrm{v}_n=\sum a_i\mathrm{v}_i$$

주어진 n개의 벡터의 모든 일차결합에 의해 만들어지는 집합은 V의 부분공간(subspace)을 이룬다. 이 부분공간을 $\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2,\ldots,\mathrm{v}_n$에 의하여 **생성된**(spanned) V의 **부분공간**이라 한다. $\sum a_i\mathrm{v}_i=0$인 일차결합에서 모든 계수 a_i가 0인 경우에만 일차결합의 값이 0이 되는 경우에, $\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2,\ldots,\mathrm{v}_n$을 **일차독립**(linear independent)이라 한다. 벡터공간 V에 속하는 모든 벡터가 일차독립인 $\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2,\ldots,\mathrm{v}_n$들에 의하여 오직 한가지의 일차결합으로만 표현될 때, $\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2,\ldots,\mathrm{v}_n$을 유한차원 벡터공간 V의 **기저**(basis)라고 한다. 기저를 이루는 벡터들은 일차독립이어야 한다. 같은 벡터

공간의 두 기저벡터는 같은 수의 원소를 가지고 있는데 이 원소의 수를 그 공간의 차원, $\dim V$ 이라고 한다. 이 모든 개념은 일차결합을 어떻게 이용하느냐에 따라 달라진다.

평면에서와 마찬가지로, 벡터공간의 기하학은 벡터공간 자기자신 또는 같은 체 F 상의 다른 벡터공간 W로의 변환(함수), 더 정확하게 말해서 선형변환(linear transformation) 에 의해서 나타내진다. 변환 T에 의한 이러한 변환에서 선형성은 다음 식과 같이 항상 보존된다.

$$T\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \mathrm{v}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i\, T(\mathrm{v}_i) \tag{3}$$

이 관계는 다음과 같이 더 간단한 식으로도 나타낼 수 있다.

$$T(\mathrm{v}_1 + \mathrm{v}_2) = T\mathrm{v}_1 + T\mathrm{v}_2, \quad T(a\mathrm{v}) = a\,T(\mathrm{v}) \tag{4}$$

이것은 변환 T가 덧셈을 보존하고(즉, 가산적이고), 스칼라곱을 보존하고 있음을 나타낸다. W의 벡터를 U의 벡터로 보내는 변환 $S: W \to U$ 와 V의 벡터를 W의 벡터로 보내는 변환 $T: V \to W$ 가 모두 선형변환이라면 이 변환의 합성변환 $S \cdot T: V \to U$ 도 선형변환이 된다. 벡터공간 V를 V 자신으로 보내는 변환을 자기준동형(endomorphism)이라고 한다. 자기준동형 변환의 역변환도 자기준동형이 될 때, 즉 $T^{-1}: V \to V$ 도 자기준동형일 때 이 변환을 정칙(non-singular)변환이라고 한다. 이 경우 (유일한) 역변환도 선형변환이 된다.
“변환”에 사용되는 이런 용어들은 가산적(additive)이며 homomorphism인 수학의 여러 가지 연산과정을 정의하는 데 사용된다.

미분연산자와 적분 연산자는 모두 선형변환이다. 예컨대, x가 0보다 크고 1보다 작은 실수축상의 단위구간, $I = \{x \mid 0 \le x \le 1\}$에서 모든 차수의 미분이 가능한 연속함수들, $f: I \to \mathbb{R}$ 의 집합 $C^{\infty} = C_I^{\infty}$에 대하여 생각해 보자. 이 집합 C_I^{∞}은 I 위의 모든 실수에 대하여 벡터의 덧셈과 스칼라곱에 대하여 다음 식이 성립하는 벡터공간이다.

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad (af)x = a(f(x)) \tag{5}$$

미분 연산자, 즉 $Df = \dfrac{df}{dx}$ 는 미분의 기본적인 규칙에 따라 $D: C^{\infty} \to C^{\infty}$ 로 변환하는 선형변환 연산자이다(“각각의 도함수를 구하여 더한 것은 각각을 더해서 도함수를 구한 것과 같다”). 함수 f의 $\int_0^x f(x)dx$ 와 같은 적분 연산자도 역시 선형변환이다. C^{∞}으로 표현되는 공간은 아주 큰 공간이며, 여기에도 기저는 있지만 유한 개의 원소를 갖는 기저는 존재하지 않음으로 무한차원 벡터공간이라 한다. 무한차원 벡터공간 C^{∞}는 함수 공간(성분이 특정한 함수로 정의된 공간)의 한 예이다. 따라서 이런 함수공간의 연구에서도 벡터공간의 용어들을 사용하는 것이 편리하다는 것은 이미 밝혀졌다.

제6장 11절에서 우리가 살펴 본 바와 같이 미분방정식 $d^2y/dx^2 = -k^2x$ 으로 주어지는 모델의 해는 두개의 해 $\cos kt$ 와 $\sin kt$ 의 일차결합이다. 이 미분방정식은 상수 계수를 가지는 동차

(homogeneous) 선형 미분방정식이다. (다시 말해 이 식은 $d^n x/dt^n$, ⋯ , dx/dt, x 와 같은 항들의 일차 결합이다.) n차 선형 방정식의 해는 서로 독립인 n개의 해의 일차결합으로 나타내진다. 두 변수 x와 y를 갖는 미분방정식에서는 제6장 9절에서 살펴 본 바와 같이 연쇄법칙에서 암시되었듯이, (x, y)-평면의 모든 점은 두 개의 다른 벡터 공간과 연계되는데, 하나는 **탄젠트**(tangent) **벡터공간**으로 그 점을 지나는 가능한 모든 경로에 수직인 벡터들로 이루어졌고, 다른 하나인 **코탄젠트**(cotangent) **벡터공간**은 이 점에서 매끄러운 함수(smooth functions)의 미분(differentials) 모두의 집합으로 이루어진다. 이 두 벡터 공간의 관계가 본 장 제4절에서 다룬 **"쌍대"**(dual) **벡터공간**이라는 표현의 기원이고, 또한 고차원의 기하학으로 발전하는 배경이 되었다. 만약에 우리가 움직이는 물체의 궤적을 추적하면, 제9장의 후반에 자세하게 논의하게 되겠지만, 탄젠트 공간은 역학(dynamics)의 발전과 밀접한 관계가 있다는 것을 알 수 있을 것이다.

대수학에서 벡터공간의 차원은 그 공간의 크기를 측정할 수 있도록 해준다. 이를테면 F에 속하는 원을 계수로 갖는 x의 다항식 $f(x)$가 F에서 **기약**(irreducible)다항식이라도 $f(x)$ 의 한 해 α 와 체 F를 이용하여 다른 체(확대체) $K = F(\alpha)$를 생성할 수 있다(제10절). 이 체 K는 F상의 벡터공간으로 볼 수도 있다 (여기서 벡터들은 K의 원소로서, 덧셈연산 및 K의 원소와의 곱셈연산을 이용하고 있다). 이 벡터공간의 차원은 바로 기약다항식 $f(x)$ 의 차수와 정확히 일치한다. (특별한 예 : 복소수체 C는 실수체 R에 $x^2 + 1$ 의 해를 추가(adjoin)해서 얻어진 **확대체**로, R상의 2차원 벡터공간을 형성한다.) 차원에 대한 이러한 이용은 **갈루아군**(Galois group)**의 원소의 수는 분해체**(splitting field)**의 차원과 같다**는 제5장 7절의 설명에서 이미 다루었다. 이와 비슷한 차원의 문제는 체를 다루면서 계속 나오며 (예를 들면 모든 유한체(finite field)를 결정하는 문제 등) 또 4원수(quaternion)나 체를 이용하는 환의 문제를 다루는 동안 자주 등장하게 된다(이런 문제를 체 상의 선형대수학이라고 한다).

따라서 **"벡터공간"이라는 개념**은 다양한 예에서 이용된다. 이러한 다양하고 많은 예와 중요성이 이미 **1888년에 페아노(Peano)에 의해 언급**되었음에도 불구하고 **1913년 출간된 봐일(Weyl)의 상대성이론 관련 저서**에서 (이 책에서는 벡터와 아핀(affine)기하학의 사용이 꼭 필요했다) 벡터공간의 공리들을 다시 다룰 때까지 수학자들 사이에서 일반적으로 주목을 받지 못했던 것은 놀라운 일이다.

식 (1)과 (2)를 이용하는 V를, 벡터에 곱하는 (체 F안의) 스칼라량 $a, b, \ldots$ 가 벡터의 좌측에 온다는 의미에서, **좌벡터 공간**이라고 한다. 같은 벡터 공간을 스칼라량을 우측에 곱하는 방법으로, **우벡터 공간**으로 정의하기도 한다. 이 둘은 구조적으로 같으므로, 다음 절에서는 쓰기 편한 **우벡터 공간**을 이용할 것이다.

2. 행렬과 변환의 비교

선형대수학을 공부하는 두 가지 방법이 있다. 벡터의 일차결합을 이용하는 기하학적인 방법과 좌표를 이용하여 구체적으로 다루는 방법이 그것인데, 사용하는 좌표계의 모양은 기저의 선택에 달려 있다. 다시 말해, 만약 (우)벡터 공간 V가 유한개의 기저 $\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2, \ldots, \mathrm{u}_n$ 을 가진다면 V에 속하는 모든 벡터 v는 다음과 같이 기저u_i 와 스칼라 계수 x_i의 (이 식에서는 스칼라 x_i가 우측에 곱해져 있음) 유일한 일차결합으로 나타낼 수 있다.

$$\mathrm{v} = \mathrm{u}_1 x_1 + \mathrm{u}_2 x_2 + \cdots + \mathrm{u}_n x_n$$

이 스칼라양들은 기저u_i에 대한 벡터 v의 **좌표**, $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$가 된다. 벡터v는 스칼라 x_i 의 n-순서쌍 X라고 할 수 있으므로 V는 이 n-순서쌍의 공간 F^n이라고 할 수도 있다. 그러므로 벡터의 모든 성질은 이 순서쌍들을 이용하여 나타낼 수 있다. 따라서 자기준동형(endomorphism) $T: V \to V$는 기저벡터인 n개의u_j를 이용하여 다음과 같이 완벽하게 나타낼 수 있다.

$$T\mathrm{u}_j = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{u}_i a_{ij} \qquad (1)$$

위의 (선형) 변환 T는 다음의 $n \times n$행렬을 이용하여 나타낼 수 있다.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad (2)$$

식 $T(\sum \mathrm{u}_j x_j) = \sum_{i,j} \mathrm{u}_i a_{ij} x_j$의 선형성에 의해 벡터의 변환$\mathrm{v}' = T\mathrm{v}$ 의 좌표 x_i' 는 다음 식으로 나타내진다.

$$x'_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j, \qquad i = 1, \cdots, n \qquad (3)$$

이 식은 정사각행렬 X가 변환 T를 **좌표**(또는 변수), x_i 를 이용하여 표현함을 보여주는 잘 알려진 예이다; 특히 j번째 기저벡터u_j 는 행렬 A의 j번째 열로 보내진다.

(3) 식으로 주어지는 좌표축을 이용한 표현과 T를 이용하여 (1) 식으로 표현하는 방법은 동치이다. 어쨌든 선형변환 T를 나타내는 행렬 A의 모양은 변환 T와 기저벡터의 선택에 따라 달라질 수 있다. 이것은 다음과 같은 의문을 제기한다. 두 개의 다른 정사각행렬이 같은 선형변환의 (행렬)표현이 되기 위한 조건은 무엇인가? (본 장 제12절 이하 참조)

일차연립방정식의 해를 구하는 것은 선형성의 또 다른 면을 보여 준다. 일차연립방정식의 해를 구하는 것은 $x'_1, x'_2, \cdots, x'_m$ 과 m개의 식(3)- 이 경우 $i = 1, 2, \cdots, m$ - 으로 이루어진 연립방정식이 주어졌을 때 주어진 모든 x_i' 에 대하여 이 방정식들을 만족시키는 모든 x_j를 구하는 것이다. 이 m개의 방정식은 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$으로 이루어진 n차원 공간 V에서 x_i' 들로 이루어진 m차원의 공간 W로의 변환, $T: V \to W$ 를 나타낸다. 이제 해에 대해 잘 알려진 결과들이 선형변환과 그에 대응하는 행렬에 대한 고찰로 바뀌어진다. 예컨대 V에 속하는 각각의 벡터v에 대한 상(image)인 $T\mathrm{v}$의 집합인 $Im(T)$는 W의 부분공간이 된다; 다시 말해 벡터 v들의 상(image)들의 집합인

$$\{(x_1', x_2', \ldots, x_m') \mid f(\mathrm{v}) = (x_1', x_2', \ldots, x_m'),\ \mathrm{v} \in V\}$$

가 벡터공간 W의 부분집합이 된다는 것이다. 이 부분집합은 부분공간을 이루며 **이 부분공간의 차원이 T (그리고 행렬 A)의 계수(rank)가 된다.** T의 **영공간**(null space)은 $T(\mathrm{v}) = 0$인 v 들의 집합으로 벡터공간 V의 부분공간 Null T이 된다. 공간 Null T의 차원을 T의 **영공간의 차원**(nullity) 이라고 한다. 간단히 기저들을 건설해보면 흥미 있게도 이 차원들 사이에는 다음과 같은 관계가 성립하는 것을 알 수 있다.

$$n = \dim(\text{domain of } T) = \dim(\text{Im } T) + \dim(\text{Null } T) \tag{4}$$

Rank-Nullity 정리라 불리는 이 방정식은 일차연립방정식의 해와 깊은 관계가 있다. 주어진 x'_j에 대하여 (3) 식으로 주어진 연립방정식이 해를 가질 필요충분조건은 벡터 $(x'_1, \cdots, x'_m)$이 Im T 안에 있어야 한다는 것이다. 특히 만약에 $n = m$ 이고, A의 계수(rank)가 n이면 (즉, A의 행이 모두 일차독립이면), 이 일차연립방정식에는 유일한 해가 항상 존재한다. 그 해는 크래머(Cramer)의 공식을 이용하여 구할 수 있다. n개의 동차식 (즉, 모든 x_i' 가 0 인 경우)에 대하여 일차독립인 해의 개수는 n에서 계수(rank)를 뺀 것이 된다. 이 결과는 대수적인 계산이 기하학적인 아이디어로 전환되는 또 다른 예가 된다.

행렬의 곱은 Cayley가 합성변환의 행렬표현을 찾아서 정의한 것이다. 만약에 $n \times n$인 B행렬이 $S: V \rightarrow V$, $S\mathrm{u}_k = \sum \mathrm{u}_j b_{jk}$의 선형변환을 나타내는 행렬표현이면 (2) 식의 계산에 의해 합성변환 $T \cdot S$ (함수 S를 먼저 취하고 다음에 함수 T를 취하는)는 다음과 같이 표현된다.

$$TS\mathrm{u}_k = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{u}_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, b_{jk} \tag{5}$$

따라서 이 합성변환을 나타내는 행렬 C의 성분은 $c_{jk} = \sum_j a_{ij} b_{jk}$, 즉 A의 i번째 행에다 B의 k번째 열을 곱한 값이 된다. 이것은 잘 알려진 행에다 열을 곱하는 행렬곱 $C = A \cdot B$를 정의한다. 합성변환에는 결합법칙이 성립하므로 행렬의 곱에도 결합법칙이 성립한다. 이것은 직접 행렬 곱의 정의를 이용해서 쉽게 증명할 수 있다. 이런 방법으로 합성변환의 "아이디어"는 행렬 계산을 이용하여 쉽게 처리되며 빛을 발하게 되었다. 특히 이런 접근은 몇 개의 성분만이 영이 아닌 행렬(sparse matrices)을 다루는 경우, 그 계산을 아주 단순하게 해준다.

정사각행렬이 아닌 경우에도 이와 같은 곱셈을 할 수 있다. l차원 공간에서 m차원 공간으로의 선형변환 S는 각 공간에 기저를 더하여 m행과 l열을 갖는 주어진 **선형변환의 행렬표현**인 $m \times l$행렬 B을 제공한다. T가 $n \times m$ 행렬표현 A를 갖는 m차원 공간에서 n차원 공간으로의 선형변환이면, 합성변환 $T \cdot S$를 나타내는 행렬 곱 AB는 식 (5)의 정의에 의해 행과 열을 구할 수 있다. 행렬의 삼중곱(정의되어 있다면)에는 결합법칙이 성립되며, 행렬의 덧셈에는 분배법칙도 성립된다. 이러한 계산을 하기 위해서는 벡터 X를 $n \times 1$ 행렬로 보는 것이 편리하고, 그렇게 되면 행렬 A가 벡터 X에 작용하는 것은 행렬 곱을 이용하여 $X' = AX$ 와 같이 나타낼

수 있다. (이 때 행렬 A는 함수의 경우와 마찬가지로 좌측에 와야 한다. 이것은 스칼라를 우측에 놓고 함수를 좌측에 놓는 것과 같은 이유이다.) 행렬 A의 열은 정의에 의해서 성분이 $(A^T)_{ij} = A_{ji}$인 전치행렬 A^T의 행으로 변환된다. 따라서 $(AB)^T = B^T A^T$인 관계가 성립된다.

지금까지 논의한 모든 것들은 n-순서쌍 X의 개념을 이용해서 설명할 수도 있다. (이러한 접근 방법은 기하학적인 일관성을 유지하지 못해서 이해하는데 어려운 측면이 있기는 하다). 전형적인 유한차원의 벡터공간 F^n은 n-순서쌍 (모두 $n \times 1$ 크기의 열)들의 합과 스칼라 곱으로 이루어졌으며, 그 부분집합은 이 연산에 닫혀있는(closed) n-순서쌍들의 집합이다. $n \times n$ 행렬 A는 그 행들이 일차독립이면 **정칙**(nonsingular)이 된다. 이것은 열이 일차 독립적인 것과 같은 의미이며, 또 $BA = I$, 즉 A에 곱해서 단위행렬이 되게 하는 B가 존재한다는 것과도 같은 의미이다. 이 경우 B는 단 한개 존재하며 따라서 B는 $A^{-1}A = AA^{-1} = I$ 의 관계를 만족하는 A의 역행렬 A^{-1}이다. A가 가역이면 선형방정식 (3)은 주어진 X'에 대하여 유일한 해 X를 가지며 이 해는 $X = A^{-1}X'$ 의 식을 이용하여 구할 수 있다. 행렬 A의 **행렬식** $|A|$는 $|AB| = |A||B|$ 라는 (multiplicative) 관계식을 만족하므로 (곱셈에 대하여) F의 준동형 사상(homomorphism)이다.

함수 합성 하에서, 체 F의 원을 성분으로 하는 모든 가역행렬들의 집합은 **일반 선형군**(general linear group) $GL_n(F)$, 을 형성한다. 또, 이것은 F의 n차원 벡터 공간에서 가역인 선형 자기준동형 사상 $T: V \to V$ 들의 집합이 이루는 군으로 표현 할 수도 있다. 기하학적으로 이것은 한 점(원점)을 고정시키고 변환하는 공간의 가역인 모든 **아핀(Affin)변환**을 포함하는데, 이 변환에는 압축, 팽창, 비틀림(shears), 반사, 원점을 중심으로 하는 회전등을 포함한다. 선형성은 이러한 매우 다양한 변환들이 공통적으로 갖는 성질이다.

행렬의 곱셈에는 교환법칙이 성립하지 않는다. 왜냐하면 선형변환의 합성의 경우 항상 교환이 가능하지는 않기 때문이다. 20세기에 행렬의 곱셈은 양자물리학에서 (기대 이상으로) 크게 응용되었다. 그러나 행렬의 이론을 이루는 기본적인 아이디어는 탄성학(elasticity)에서 많은 변수를 가지는 미분의 선형적 근사를 구하는 과정에서 출발했다. 예로, 3차원에서 원점을 고정시킨 $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$로의 작고 매끄러운 변형(deformation)을 생각해 보자. 이 변형에 의해서 x, y, z으로 나타내진 각 점은 x', y', z'으로 변형될 것이다. x, y, z의 선형함수인 아래의 변형된 점의 좌표는 선형 항을 가지고 시작하는 테일러(Tayler) 전개를 취한다;

$$
\begin{aligned}
x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + \cdots, \\
y' &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + \cdots, \\
z' &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + \cdots,
\end{aligned}
$$

따라서 이 변환의 성질들이 일차 근사식(approximation)에서는, 계수 a_{ij}들에 의존하게 되는데 이 점을 인식한 것은 영국의 케일리(Cayley)와 대륙의 다른 대수학자들이 계수들의 배열인, $A = (a_{ij})$를 별도로 생각하려는 시도가 있기 훨씬 오래 전 이었다. 이 경우에도 역시 행렬을 다루는 추상적인 아이디어가 더욱 구체적인 문제를 통하여 제기되었던 것이다.

3. 고유값

수학적 대상의 행렬표현은 기저의 선택에 따라 달라지므로 행렬 P에 의해 $y_i = \sum p_{ij} x_j$와 같이 기저 x_i가 새로운 기저 y_i로 바뀌는 기저의 변환에 특별한 주의를 기울여야 한다. 역변환이 가능한 경우 성분 p_{ij}로 이루어진 정사각행렬 P는 가역이다. 다른 기저를 이용하는 V의 같은 자기준동형의 행렬 표현인 두 개의 행렬 A와 B는 **닮음(similar) 행렬**이라고 한다. 따라서 옛 좌표계(x)와 새로운 좌표계(y)사이에 다음과 같은 관계가 성립한다.

$$x' = Ax, \quad y' = By$$

좌표 변환은 $y = Px$, $y' = Px'$ 와 같이 행렬곱에 의해 나타낼 수 있으므로 간단한 계산에 의해 $B = PAP^{-1}$가 되는 것을 알 수 있다. 다시 말해 $B = PAP^{-1}$를 만족시키는 가역행렬 P가 존재할 때 A와 B는 **닮음**이라고 말할 수 있다. 아래(제12절)에서는 일반적으로 어떤 경우에 두 행렬이 닮음인지를 결정하는 좀 더 구체적인 방법에 대해서 다루게 될 것이다.

우선 주어진 행렬 A와 닮은 행렬 중 가장 단순한 모양의 행렬은 무엇일까? 특히, 언제 행렬 A가 주대각선 상의 성분의 값은 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ 이고 다른 성분은 모두 0인, 아래와 같은 대각선행렬 D와 닮음일 수 있을까?

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ 0 & \lambda_2 & & & \\ \cdots & \cdots & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \\ 0 & \cdots & \cdots & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

만일 이런 행렬이 있다면, 이에 대응하는 선형변환은 단순히 i번째 기저 벡터에 λ_i를 곱한 것이 될 것이다. 그러한 스칼라 λ_i를 A의 **고유값**이라고 한다. 다시 말하면 0이 아닌 벡터 v에 대하여 $Tv = v\lambda$인 관계를 만족시키면 λ를 (자기준동형) T의 **고유값**(eigenvalue)이라고 한다. 마찬가지로, 행렬에서는 $x \neq 0$인 x에 대하여 $Ax = x\lambda$를 만족하는 스칼라 λ를 행렬 A의 고유값이라고 한다. 한편 스칼라 λ에 대하여 $Ax = x\lambda$의 관계를 만족하는 벡터 x를 고유값 λ에 대응하는 행렬 A의 **고유벡터**(eigenvector)라고 한다. 고유값은 좌표계의 변환과는 관계없이 불변이다. 그리고 지금까지의 논의로부터 다음 정리가 성립되는 것을 알 수 있다.

정 리 1 n차의 정사각행렬이 어떤 대각선행렬과 닮음일 필요충분 조건은 A가 n개의 일차독립인 고유벡터를 가지는 것이다.

(대각선 성분은 모두 1 이고 다른 성분은 모두 0 인 행렬인) 단위행렬 I를 이용하면 행렬방정식 $Ax = x\lambda$는 $(A - I\lambda)x = 0$과 같이 고쳐 쓸 수 있다. 따라서 스칼라인 λ가 A의 고유값이 되기 위해서는 x를 변수로 하는 n개의 동차 연립일차방정식이 0이 아닌 해를 가져야 한다. 다시 말해 $A - I\lambda$로 표현되는 행렬이 **비가역(singular) 행렬**이어야 한다. 그리고 정사각행렬이 비가역일 필요충분조건은 이의 행렬식이 0이어야 한다. n차의 정사각행렬 A의 행렬식 $|A - I\lambda|$은 다음과 같이 λ의 n차 다항식으로 쓸 수 있다.

$$(-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1}(a_{11} + \cdots + a_{nn})\lambda^{n-1} + \cdots + |A| = 0 \qquad (2)$$

위 식을 행렬 A의 **특성방정식**(characteristic equation)이라고 한다. 지금까지 논의된 내용을 정리하면 다음과 같은 정리를 얻을 수 있다.

정 리 2 행렬 A의 **고유값**은 각각이 자신의 특성방정식의 해이다.

대수학의 기본정리에 의하여 “n차의 실수 (또는 복소수) 행렬은 n개의 고유값을 ($\mathbb{C}$에서) 가진다”는 것이 보장된다. 고유값과 고유벡터의 개념은 선형대수학에서 매우 유용하며 특히 해석학이나 물리학에서 자주 사용되는 개념이다. 처음에 간단했던 선형성의 개념이 다양하게 가지를 치게 된 것이다. 간단한 예로 다음과 같은 n개의 (실수) 변수, x_i를 가지는 일차 (그리고 동차) 연립 미분방정식을 생각해 보자.

$$\frac{dx_j}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j, \quad i = 1, \ldots, n \qquad (3)$$

성분이 위 a_{ij}인 실수행렬 A는 n개의 고유값을 가진다. 물론 이 고유값은 모두 다를 필요는 없으며, 모두 실수이거나 복소수일 필요도 없다. 만약에 A가 대각행렬과 닮음행렬이라면 좌표계를 대각행렬에 대응하는 $y_1, \cdots, y_n$으로 변환하여 식(3)은 다음과 같이 변환시킬 수 있다.

$$\frac{dy_i}{dt} = \lambda_i y_i, \quad i = 1, \ldots, n$$

이 식을 이용하면 각각의 해는 $y_i = C_i e^{\lambda_i t}, \quad i = 1, \ldots, n$가 된다는 것을 쉽게 알 수 있다. 여기서 C_i는 적분상수이다. 만약에 고유값 λ_i가 실수이고 0 보다 크다면 해 y_i는 증가하는 지수함수가 될 것이다. 그러나 고유값이 복소수인 경우도 있을 수 있다. 이런 경우가 바로 실수로 이루어진 실함수를 다루는 과정에서 복소수함수가 등장하게 되는 예 중의 하나이다. 특히, 이 경우에는 지수로 복소수를 갖는 지수함수가 등장하게 된다 - 즉, 지수함수 e^z의 지수 z가 복소수인 경우이다.

행렬 A의 특성다항식 (2)는 기대 이상의 성질을 갖는다. 즉, 식(2)에 스칼라 변수 λ 대신 A를 대입하면 그 결과는 항상 영행렬 O이 된다. 이것을 **케일리-해밀톤 (Cayley-Hamilton) 정리**라고 한다.

4. 쌍대공간

벡터공간은, 서로 상호 작용하는, 순서쌍으로부터 자연스럽게 제기된다. 행 벡터에다 열 벡터를 곱하면 스칼라량이 된다; 이 경우에 “행 벡터”는 “열 벡터”상에서의 선형함수라고 볼 수 있으며,

역으로 열 벡터는 행 벡터의 선형함수라고 볼 수 있다. 제6장9절에서 이야기한 바와 같이 위에서 미분 가능한 함수 $z=f(x,y)$의 어떤 path (u)를 따라서 구한 **방향도함수**는 이 점에서의 코탄젠트 벡터인 그레디언트(gradients)와 방향을 나타내는 벡터u의 내적(inner product)을 얻을 수 있다. 따라서 그레디언트(코탄젠트 벡터)는 접(tangent) 벡터의 선형함수이며, 마찬가지로 역도 성립한다. 이 생각을 조금 더 발전시키기 위해 우선 임의의 집합 X상의 스칼라 값을 갖는 함수들의 집합도 벡터공간을 이룬다는 것에 유의하자. 특히 F가 체인 경우, $f,g: X \rightarrow F$인 모든 함수들의 집합 F^X는, X에 속하는 모든 x와 F에 속하는 모든 스칼라 a에 대한 아래와 같이 정의된 두 점별(pointwise) 연산에 대하여, 벡터공간을 이룬다.

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad (af)(x) = a(f(x)) \tag{1}$$

물론 무한집합 X의 값을 체 F로 보내는 모든 함수들의 집합으로 이루어진 벡터공간 F^X는 무한차원을 갖는다. 그러나 X가 n개의 원소를 가지는 유한집합이면 F^X는 F의 원소들의 n-순서쌍으로 이루어진 벡터 공간 F^n과 동형이 된다. 만약 $X=V$ 자신이 F상에서의 벡터공간이라면, 단지 $f: V \rightarrow F$ 인 **선형 함수들의 집합**을 생각해 보는 것이 더욱 자연스러울 것이다. (1)식의 두 연산하에서 **이 선형함수들의 집합은 벡터공간(즉, F^V의 부분공간)을 이룬다.**

$$V^* = \hom(V,F) = \{f \mid f:\ V \rightarrow F \text{ 가 선형 }\} \tag{2}$$

이 공간을 V의 **쌍대공간**(dual space)이라고 부른다. 이 공간은 개념적으로 벡터공간 V와는 다르다. 그러나 V가 유한차원의 공간이라면 이 공간은 V와 같은 "크기(size)"를 갖는다. 특히, 만약에 V가 n개의 원소 $\mathrm{u}_1,\ldots,\mathrm{u}_n$으로 이루어진 기저를 갖는다면, 좌표계 x_j 로 표현된 벡터상의 함수 f의 값은 다음과 같이 계산될 수 있다.

$$f\left[\sum_{i=1}^{n} \mathrm{u}^i \mathrm{x}_i\right] = \sum_{i=1}^{n} [f\mathrm{u}^i]\ \mathrm{x}_i \tag{3}$$

따라서 선형함수 f의 값은 V에 주어진 n개의 기저벡터에 대한 n개의 함수 값 $\mathrm{y}^i = f\mathrm{u}^i$에 의하여 완전히 결정된다. 이것은 y^i 들이 f를 나타내는 좌표계가 되어야 한다는 것을 말한다. 실제로, 쌍대 공간 V^*안의 n개의 특별한 벡터들 $\mathrm{u}^1,\ldots,\mathrm{u}^n$은 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\begin{aligned} \mathrm{u}_i(\mathrm{u}^j) &= 1, \quad i = j, \\ &= 0, \quad i \neq j, \end{aligned} \tag{4}$$

이것을 **크로넥커 델타**(Kronecker delta) 기호 δ를 이용하여 다시 나타내면$\mathrm{u}_i(\mathrm{u}^j) = \delta_{ij}$라고 쓸 수 있으며 이는 n차의 항등행렬의 성분과 같다. 따라서 $f = \sum y^i \mathrm{u}_i$이고, u_i는 쌍대공간 V^*의 n개의 기저를 형성한다. V^*의 기저 $\mathrm{u}^1,\ldots,\mathrm{u}^n$을 $\mathrm{u}_1,\ldots,\mathrm{u}_n$ **의 쌍대기저**라고 한다. (후자의 경우 첨자를 위에 썼다. 따라서 $\sum y^i \mathrm{u}_i$, $\sum \mathrm{u}^i x_i$ 에서와 같이 첨자 i가 한 번은 위에 그리고 한 번은

아래에 나타나게 된다.) 어떤 경우에도 차원에 대해서는 다음과 같은 결론을 얻을 수 있다.

$$\dim V \text{ 가 유한이면 } \dim V^* = \dim V \text{ 이다.} \qquad (5)$$

이러한 비교에도 불구하고, 벡터공간과 그 벡터공간의 쌍대공간은 개념적으로 다르다. 이런 차이는 무한차원 공간에서 구체적으로 나타난다. 예를 들면, V를 F의 원을 성분으로 하는 모든 유한 수열 $(x_0, x_1, \cdots, x_n, 0, 0, \cdots)$들로 이루어진 공간이라고 하자 - 즉, 이 공간은 N에서 F로의 (0이 아닌 값을 오직 유한개만 갖는) 모든 함수들로 이루어 졌다고 할 수도 있다. 이 공간에 속하는 모든 벡터는 i점에서는 1의 값을 갖고, 그 외의 점에서는 모두 0인 벡터 u^i들의 유한 일차결합, $\sum x_i \mathrm{u}^i$으로 나타낼 수 있다. 따라서 이 벡터 u^i는 벡터공간 V의 기저를 형성한다. 그러므로 어떤 선형함수 $f: V \to F$도 이 기저벡터와 $f\mathrm{u}^i = y_i$ 를 이용하여 나타낼 수 있다. 이것은 쌍대 벡터공간 V^*는 F에 속하는 y_i의 무한수열, $(y_0, y_1, \cdots)$로 이루어진 공간 F^{N}으로 나타낼 수 있다는 것을 뜻한다. 이 경우 **공간 V^*는 공간 V보다 훨씬 크다.** 예를 들면, F가 유리수 체라면, V는 가산적(denumerable)이지만 V^*는 그렇지 않다. 이것이 왜 V^*가 V와 다르다고 하는지를 잘 보여준다.
우리는 V로부터 V^*를 만들어 냈다. 그러나 두 공간을 대칭적으로 다루면 좀 더 깊이 이해할 수 있다. V에 속하는 벡터 v에서 V^*에 속하는 함수 f의 값을 정하는 과정은 다음과 같이 V^*에 속하는 f와 V에 속하는 v라는 두 개 변수를 가진 함수로 나타낼 수 있다.

$$e: V^* \times V \to F, \quad e(f, v) = f(v) \qquad (6)$$

f가 고정되어 있을 때 함수 f는 V에서 F로의 선형사상이므로 함수 e(evaluation)는 V에서의 선형함수이다. v가 고정되어 있을 때 이 함수는 쌍대공간 V^*에서 (1) 식에 의해 정의된 벡터공간 연산을 성분으로 하기 때문에 f에서 선형이 된다. 결론적으로 말해서 두 변수로 이루어진 위의 함수 e는, 각 변수에 대해 모두 선형인, 쌍선형(bilinear)함수이다. 일반적으로 같은 체 상의 임의의 두 벡터공간 W와 V에 대하여, 두 변수를 갖는 함수 $b: W \times V \to F$가 쌍선형이기 위한 필요충분조건은 W에 속하는 w가 고정되어 있을 때는 v의 선형함수이고, v가 고정되어 있을 때는 w의 선형함수이어야 한다. 이것은 다시 말해 고정된 모든 w_0에 대하여 $b(\mathrm{w}_0, -): V \to F$는 쌍대공간 V^*라는 것을 뜻한다. 따라서 W에서 V^*로의 다음과 같은 사상이 존재한다.

$$W \to V^*, \quad \mathrm{w}_0 \mapsto b(\mathrm{w}_0, -) \qquad (7)$$

마찬가지로 b는 다음과 같은 선형사상을 결정한다.

$$V \to W^*, \quad v_0 \mapsto b(-, v_0) \qquad (8)$$

정 리 W와 V를 F상의 유한차원 벡터공간이라고 하자. 만약에 함수 $b : W \times V \rightarrow F$가 쌍선형이고, 모든 w_0 와 v_0에 대하여

$$\begin{aligned} b(\mathrm{w}_0,-) &= 0 \text{일 때 } \mathrm{w}_0 = 0 \text{이고,} \\ b(-,v_0) &= 0 \text{일 때 } v_0 = 0 \text{이면} \end{aligned} \tag{9}$$

b는 (7) 식과 (8) 식에 의해 $W \cong V^*$이고 $V \cong W^*$인 동형사상을 결정한다.

((9) 식의 성질을 갖는 쌍선형 함수 b는 **쌍대 짝**(dual pairing)이라고 부른다. 위의 정리는 쌍대 짝 공간(dually paired space)은 한 공간이 다른 공간의 쌍대공간이라는 것을 말하고 있다.)

증 명 (9) 식의 가정은 (7) 식과 (8) 식의 사상의 영공간이 $\{\mathbf{0}\}$임을 의미한다. 따라서, 계수(rank)와 영공간의 차원(nullity)을 더하면 정의역의 차원과 같아진다는 잘 알려진 정리를 이용하여 이 두 개의 선형사상이 동형사상이라는 것을 알 수 있다. (증명 끝)

이런 추상적인 형식화는 **코탄젠트**와 **탄젠트** 공간 (제6장 9절)의 기하학적 관계를 다시 보여준다. 이 부분에서 2변수(two variables) 함수에 적용되는 미분의 연쇄법칙(chain rule)은 코탄젠트 벡터(함수의 그레디언트-기울기 벡터) 와 (경로의) 탄젠트 벡터의 곱을 이용한다. 이 곱은 쌍선형이고 (9) 식을 만족하므로 **쌍대 짝**이다. 따라서, 이 정리에 의하여 **코탄젠트 공간은 탄젠트 공간의 쌍대공간이 된다.** (이의 역도 마찬가지이다). 이렇게 해서 미적분학이 대수적 쌍대성(algebraic duality) 이론과 연결이 된다.

$1 \times n$ 행렬인 행벡터 $\mathrm{y} = [y_1, \ldots, y_n]$에 $n \times 1$ 행렬인 열벡터 $\mathrm{x} = (x_1, \ldots, x_n)$을 곱하는 행렬 곱셈의 결과는 스칼라, $\sum_{i=1}^{n} y_i x_i$ 가 된다; 이것이 쌍대짝(dual paring)이다; 따라서 각각의 행 행렬들은 다른 각각의 행렬들의 쌍대(dual)들이다.

쌍대성은 쌍대의 쌍대(double dual), V^{**}, 는 물론 더 그런 쌍대에 대한 더 높은 차원의 쌍대 개념을 보여주는 여지를 남겨놓지 않았다. 특히 유한 차원에서는 그럴 필요조차 없었다. 식(6)에 주어진 함수(evaluation) $v \mapsto e(-, v)$ 는 각각의 벡터 v를 쌍대공간, V^*의 선형함수 (즉, 이중쌍대 공간, V^{**}의 원소)로 바꾸어 놓는다. 이 사상,

$$v \mapsto e(-, v) : V \rightarrow V^{**} \tag{10}$$

은 V가 유한차원일 때 동형사상이 된다. 이것을 다르게 표현하면, 식(6)의 **함수(evaluation)** e는 V와 V^*의 쌍대짝(dual paring)이고, 정리에 의해, **동형사상,** $V \cong (V^*)^*$**을 제공한다.** 특수한 기저를 선택한 것도 아니고 단지 주어진 구조만을 이용하여 식(10)에서 바로 정의되었으므로 이것을 **자연 동형사상**(natural isomorphism)이라고 부른다. 주어진 유한차원 벡터공간 V에 대하여, V의 기저, u^i를 이에 대응하는 쌍대벡터 V^* 의 기저 u_i로 보내는 동형사상, $V \cong V^*$도 존재한다. (그러나 이 동형사상은 기저의 선택에 따라 달라지므로 부자연스럽다. 따라서 이런 동형사상은 자연동형사상이라고 안한다.)

행렬은 (함수로) 왼쪽에서 또는 오른쪽에서도 작용한다. 따라서 사각형의 $m\times n$ 행렬 A는 열 벡터 x에 작용하여 n차원 공간에서 m차원 공간으로의 선형변환, $\mathrm{x}\mapsto A\mathrm{x}$ 를 제공한다. 마찬가지로, 행 벡터 y에 작용하여 m차원 공간에서 n 차원 공간으로의 또 다른 선형변환 $\mathrm{y}\mapsto \mathrm{y}A$를 준다. 제2절의 식 (1) 에서와 같이 A는 우측에 오기도 하고 제2절의 식 (2)에서처럼 좌측에 오기도 한다. 이것은 쌍대성을 이용하여 설명할 수 있을 것이다. 만약에 $T: V\to W$가 선형변환(행렬, A로 주어진 열 벡터상의 변환)이면, 쌍대공간 W^*안의 모든 벡터 f는 선형사상 $f: W\to F$이다. 따라서 합성함수, $fT: V\to F$는 쌍대공간 V^*의 원소가 되어 $f\mapsto fT$ 자신이 다음과 같은 선형사상이 된다.

$$T^*: W^* \to V^* \tag{11}$$

여기서보면 함수 T^*와 T의 방향이 바뀐 것을 알 수 있다. 즉, $(TS)^* = S^*T^*$ 이다; 보통 공간에 대하여 $V\mapsto V^*$ 또는 그들의 사상에 대하여 $T\mapsto T^*$와 같이 쌍대를 만드는 것을 (공간과 사상의) 反變 펑토(contravariant functor)라고 하기도 한다.

V^*의 건설과정을 좀 더 구체적으로 설명해 보자. 같은 길이를 가지는 두 행의 합(term by term)을 구하는 방법은 같은 크기의 두 행렬을 합하는 방법을 제시한다. 좀 더 개념적으로 설명하면 주어진 벡터공간 V와 W에서 두 선형변환, $T, T': V\to W$는 다음 식(pointwise) 에 의해서 (벡터) 합 $T+T': V\to W$을 정의한다.

$$(T+T')\mathrm{v} = T\mathrm{v} + T'\mathrm{v}$$

(스칼라 배는) 스칼라를 각각의 T에 각 점에서 (pointwise) 곱을 하여 정의한다. **그럼 이 (벡터) 합과 스칼라 배라는 두 연산과 함께 모든 준동형사상들 $T: V\to W$ 의 집합은 벡터공간을 이룬다.** 이것은 다음 식과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathrm{hom}(V, W) = \{\, T \mid T: V\to W\text{가 선형}\} \tag{12}$$

특히, 위에서 **벡터공간 W가 V의 (underlying 또는 base) 체 F인 경우** ($W=F$는 (base field) F 자기 자신 위의 벡터공간으로 생각할 수 있다. 예: 실수체 $\mathbf{R}$상의 벡터공간 $\mathbf{R}$), 이 공간 $\mathrm{hom}(V, F)$는 바로 쌍대공간 V^*가 된다. **만약에 V와 W가 각각 m차원, n차원이라면, 기저의 선택에 의해 T는 행렬로 대치할 수 있다. 따라서 벡터공간 $\mathrm{hom}(V, W)$가 F의 원을 성분으로 하는 모든 $n\times m$행렬들로 이루어진 공간과 동형이라는 것이 증명되었다. 이 벡터공간의 기저는 하나의 성분만 1이고 나머지 성분은 모두 0인 nm개의 서로 다른 행렬들이고, 차원은 nm이다.**

5. 내적공간(Inner product space)

선형 벡터공간만으로 다양한 기하적인 설명에 대한 필요를 모두 답하기에는 부족하다. 예를 들면

선형 변환만 하더라도 직선을 직선으로 변환시킬 뿐만 아니라, 각을 변형시키기도 하고, 원을 타원으로, 그리고 일반적으로는 길이도 변환시킨다. 그런데 앞에서 삼각함수와 평면의 회전등을 논의하면서, 우리는 각도와 거리에 대한 서술을 할 때 두 평면 벡터의 내적을 활용하는 것이 매우 편리하다는 사실을 제4장 9절에서 이미 확인했다. 이런 (내적의) 활용은 (다른 많은 경우에도 그렇지만) 2차원 벡터의 경우가 전형적이다. 벡터공간의 구조와 내적의 구조를 결합함으로써 n차원 공간에 대한 적절한 "유클리드" 기하학을 얻을 수 있는 것이다.

내적공간 E는 벡터 u와 v 사이에 (실수함수인) 내적 u · v이 정의된 실수체 $\mathbf{R}$상의 벡터공간 E이다. 이 공간은 (제4장 9절의 (10), (11), (12) 방정식과 같이) 쌍선형이며 대칭적이고 **양의 정부호**(positive definite)이다. 따라서 각각의 차원 n에 대하여 실수의 n-순서쌍 $(x_1, \cdots, x_n)$의 공간 $\mathbf{R}^n$은 다음과 같은 "**표준**(standard)" **내적**을 갖는다.

$$(x_1, \cdots, x_n) \cdot (y_1, \cdots, y_n) = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n \tag{1}$$

실수의 무한 수열 $(x_1, x_2, \cdots \quad \cdots)$ 중 제곱의 합이 수렴하는 모든 수열로 이루어진 공간, 즉, 힐버트 공간(Hilbert space) l^2가 존재한다. $\sum x_i^2$ 과 $\sum y_i^2$ 가 수렴한다는 것은 아래의 내적이 수렴한다는 것을 뜻한다.

$$(x_1, x_2, \cdots) \cdot (y_1, y_2, \cdots.) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots \tag{2}$$

선형대수학에서 힐버트 공간(Hilbert space) l^2을 이용한다면 해석학에선 마찬가지로 르베그(Lebesque)적분 가능한 (제6장 11절) 모든 실수함수 (단위 구간 안에서)의 동치류의 공간인 L^2 공간을 이용한다. 이 공간에서의 내적은 다음 식과 같은 **르베그 적분**(Lebesque integral)이다.

$$f \cdot g = \int_0^1 f(x)\, g(x)\, dx \tag{3}$$

어떤 내적이 주어지면, 각 벡터의 **크기** 또는 **노름**, $|\mathrm{u}|$을 그 내적을 이용하여 다음과 같은 함수로 정의할 수 있다.

$$|\mathrm{u}|^2 = \mathrm{u} \cdot \mathrm{u}, |\mathrm{u}| \geqq 0 \tag{4}$$

두 벡터 사이의 각 θ는 **코사인 법칙**을 이용하면 다음과 같이 된다는 것을 알 수 있다.

$$\mathrm{u} \cdot \mathrm{v} = |\mathrm{u}||\mathrm{u}|\cos\theta \tag{5}$$

특히 $\mathrm{u} \cdot \mathrm{v} = 0$이면 두 벡터는 서로 직교한다. 이 각도가 의미를 가지기 위해서는 아래의 코시-**슈바르츠**(Schwartz) **부등식**이 성립해야 한다. 즉, 임의의 두 벡터의 노름의 곱과 내적 사이에는 다음과 같은 부등식이 성립한다.

$$|\mathrm{u}\cdot\mathrm{v}| \leq |\mathrm{u}||\mathrm{v}| \tag{6}$$

이것은 내적공간의 공리로부터 증명할 수 있다. 또, 두 벡터 사이의 거리 즉 두 벡터의 끝점 사이의 거리는 $|\mathrm{u}-\mathrm{v}|$로 정의한다. 슈바르츠 부등식으로부터 이 길이는 삼각형의 세 변의 길이 사이에 존재하는 부등식을 만족시킨다는 것을 알 수 있다. 따라서 내적 공간은 **거리공간**(metric space)이라는 것을 알 수 있다. 사실 (1) 식으로 정의된 내적과 $\mathbf{R}^n$에서 두 개의 n-순서쌍 x와 y사이의 거리는 다음과 같다.

$$((x_1-y_1)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2)^{1/2}$$

우리는 결국 n차원에서 피타고라스의 정리가 성립되는 기하공간으로 다시 돌아오게 된 것이다. 유한 차원 내적 공간의 임의의 기저, $\mathrm{u}^1,\ldots,\mathrm{u}^n$에 대하여 두 기저 벡터의 내적 $\mathrm{u}^i\cdot\mathrm{u}^j$ 은 스칼라 g^{ij}이다. 그리고 이 스칼라 량은 다음 식에서와 같이 두 벡터의 내적을 결정한다.

$$\left[\sum\mathrm{u}^i x_i\right]\cdot\left[\sum\mathrm{u}^j y_j\right]=\sum_{ij} g^{ij}x_i y_j \tag{7}$$

위 식의 우변은 x와 y의 “쌍선형(bilinear)" 함수로 나타내진 내적의 좌표계 표현이다. 어쨌든 보통의 내적인 경우 이 내적을 나타내는 행렬 $G=(g^{ij})$는 $n\times n$항등행렬이다. 이것은 상호 직교하는 기저를 선택하여 기저벡터의 내적 $\mathrm{u}^i\cdot\mathrm{u}^j$의 값이 크로넥커 델타 δ_{ij}값이 되는 경우에는 유한차원을 가지는 모든 내적에 대하여도 성립한다. 이것은 다시 말해 기하학적으로 두 기저벡터의 크기는 1 이고 어떤 두 기저벡터도 상호 직교한다는 것을 의미한다. 서로 직교하지 않는 임의의 기저 $\mathrm{v}^1,\ldots,\mathrm{v}^n$로 부터도 다음과 같은 방법을 이용하면 서로 직교하는 기저를 만들 수 있다. 우선 v^2에 v^1에다 적당한 값을 곱한 것(정사영)을 빼서 v^1에 수직인 기저를 만든다. 그리고 같은 방법으로 v^3를 v^1은 물론 v^2와도 수직이 되도록 변형시킨다. 이런 과정이 모두 끝난 후에 각 기저의 크기를 1 이 되도록(normalize) 하면 서로 직교하고 길이는 모두 1 인 새로운 기저가 만들어진다. 이 기저를 **정규 직교 기저**(orthonormal basis)라 하고, 이러한 과정을 **그램-슈미트 정규 직교화 과정**(Gram-Schmidt o.n. process)이라고 한다. 푸리에(Fourier) 급수, 힐버트 공간 등 다양한 무한차원 공간에서도 정규이며 상호 직교하는 기저가 같은 방법으로 얻어진다. 이런 정규 직교기저 같은 개념은 기하학에서 해석학으로 영역을 넓혀서 활용된 것이다.

내적은 자동적으로 벡터공간 자기 자신과 쌍대 짝을 이룬다. 따라서 내적을 갖는 각 유한차원 공간은 그 자신의 쌍대공간과 동형이다. 그 이유는 각 벡터 v는 벡터이면서 동시에 v와의 내적이라는 선형함수이기도 하기 때문이다. 그러므로 이런 (내적) 공간에서는 공간과 그것의 쌍대 공간을 구분할 필요가 없어지는 것이다.

6. 직교행렬

내적을 갖는 공간에서는 유클리드 기하학의 모든 개념이 그대로 성립한다. 구(sphere)나 강체운

동도 정의할 수 있다. 그러한 공간 E에 잘 맞는 자기준동형사상(endomorphism)이 **직교변환**이다. 직교변환 $T: E \to E$는 선형 변환이며, 한 쌍의 어떤 벡터 $\mathbf{u}$와 $\mathbf{v}$에 대하여도 $T\mathbf{u} \cdot T\mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$인 관계가 성립하므로, 내적을 보존한다고 할 수 있다. 이것은 T가 길이와 각을 보존하며 따라서 상호 직교하는 벡터의 관계도 보존한다. 실제로, 만약에 T가 E의 정규 직교 기저를 정규 직교 기저로 변환시킨다면 T는 직교변환이라 한다. 왜냐하면 내적은 이 기저에 대응하는 좌표계상의 제5절 식(1)로 부터 계산되기 때문이다.

정사각행렬 A가 **직교**(orthogonal)행렬이기 위한 필요충분조건은 대응하는 선형변환이 (제5절의 식 (1)로 주어진 내적과 관계된) 직교변환이라는 것이다. 열 벡터 X에 대한 이 변환은 $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ 이므로, 이 변환은 기저벡터를 순서대로 A의 열로 변환시킨다. 따라서 행렬 A가 직교이기 위한 필요충분조건은 이 행렬의 열들이 노름은 1이고 서로(pairwise) 직교라는 것이다. 만약에 A^T가 A의 전치행렬(transpose)이면 이것들의 행렬 곱 A^TA는 단위 행렬 I 가 된다. 따라서 A의 전치행렬 A^T는 좌측 역행렬이며 동시에, 우측 역행렬도 된다. 즉 정사각행렬 A가 직교행렬이기 위한 필요충분조건은 아래와 같이 전치행렬이 자신의 역행렬이 되는 것이다.

$$A^TA = I = AA^T \tag{1}$$

그런데 두 행렬의 곱의 행렬식은 각 행렬의 행렬식의 곱과 같으므로 위의 방정식은 직교행렬의 행렬식 값은 ±1 이 된다는 것을 의미한다. 그리고 만약에 직교행렬 A가 $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$인 고유벡터를 갖는다면, 방정식 $A\mathbf{x} = \mathbf{x}\lambda$ 와 크기의 보존이 의미하는 것은 직교행렬의 가능한 실수 고유값은 $\lambda = \pm 1$ 뿐이라는 것이다.

2차원 유클리드 공간에서의 직교변환은 원점을 고정시킨 채 이루어지는 강체 운동이므로, 회전이거나 회전시킨 후 대칭변환을 한 것일 뿐이다. 따라서 2×2 직교행렬은 유일하게 아래의 모양의 행렬뿐이다.

$$A_\Theta = \pm \begin{pmatrix} \cos\Theta & -\sin\Theta \\ \sin\Theta & \cos\Theta \end{pmatrix} \tag{2}$$

이 행렬은 제4장 9절의 식 (6)에서와 같이 원점을 중심으로 Θ 만큼 회전시킨 회전변환을 나타낸다. 이 행렬의 특성방정식은 $\lambda^2 - 2\lambda\cos\Theta + 1 = 0$이다; 따라서 이 행렬의 고유값 $\lambda = \cos\Theta \pm i\sin\Theta$ 는 $\Theta = \pi k$가 아니라면 실수가 아닌 복소수이다. 그러므로 완전한 한바퀴 회전이나 반바퀴 회전을 제외하고는 실고유벡터가 존재하지 않는다. 다시 말해 어떤 벡터의 크기도 회전의 결과가 원래 벡터의 1아닌 스칼라 배가 되지는 않는다. 즉, 모든 고유값은 크기가 1이여만 한다.

이 사실은 일반적으로 성립한다, 직교행렬 A의 고유값은 (따라서 직교변환은) 항상 절대값이 1인 복소수이다. 이것을 확인하기 위해 A 행렬의 실수 성분들을 복소수로 취급한다. 그리고 A를 n개의 복소성분의 열 $\mathbf{x}$ 들로 이루어진 복소수 벡터공간 $\mathbb{C}^n$에 대응시켜 보자. 이 공간 $\mathbb{C}^n$에서의 내적은 다음 식에 의해 주어진다.

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n) \cdot (y_1, \cdots, y_n) = x_1y_1^* + \cdots + x_ny_n^* \tag{3}$$

이 식에서 y^* 는 y 의 **공액복소수**(complex conjugate)를 나타낸다. 언제나 $yy^* \geq 0$ 이므로 내적은 쌍선형이고 양의 정부호이다. 그러나 대칭은 아니다. 오히려 임의의 두 벡터 u와 v에 대하여 다음 식이 성립한다는 의미에서 반대칭적(anti-symmetric)이라고 할 수 있다.

$$(v \cdot u) = (u \cdot v)^*$$

이러한 (쌍선형이고, 양의 정부호이며, 반대칭적인) 내적을 가지는 $\mathbb{C}$ 상의 벡터공간을 **유니타리 공간**(unitary space)이라고 한다. 복소수에 관한 유니타리 공간에 관한 이론은 실수에 관한 내적 공간의 이론과 매우 비슷하다. 특히 선형 변환이 유니타리가 되기 위한 필요충분조건은 내적을 보존하는 것이고, 복소 성분을 가진 $n \times n$ 정사각행렬 A가 **유니타리 행렬**이 되기 위한 필요충분조건은 공액(conjugate) 전치행렬이 역행렬과 같은 것이다. 따라서 유니타리 행렬(변환)은 절대값이 1인 고유값을 가진다. 그리고 실수 성분의 직교행렬은 유니타리 행렬이어야 한다. 그러면 고유값에 관한 위의 결과는 여기에도 적용된다. 이것은 실수에 관한 문제의 해를 구하기 위해서 복소수를 다루어야 하는 또 다른 예이다.

정의로부터 $n \times n$ 직교행렬은 행렬곱 하에서 **직교군**(orthogonal group), O_n이라고 부르는 군을 형성한다. 이 군은 n차원 내적공간상의 모든 직교 자기준동형사상들이 이루는 군으로 표현될 수도 있다. 이 군은 제3장 8절에서와 같은 방법으로 나타내진 공간의 회전방향을 뒤집는 반사를 포함한다. 이러한 변환의 행렬표현의 행렬식 값은 ±1 이다. 직교행렬(orthogonal matrix)중 행렬식의 값이 1인 행렬들의 집합은 **특수직교군**(special orthogonal group)이라고 불리는 O_n의 부분군 SO_n을 이룬다.

직교변환도 원점(영벡터)을 고정시킨 강체운동으로 표현할 수도 있다. 평면의 경우와 마찬가지로 n차원 내적공간에서의 가장 일반적인 강체운동은 평행이동이 뒤따르는 직교변환이다.

지금까지의 논의를 요약하면, 공간, 변환, 강체운동과 같이 눈으로 보는 기하학적 아이디어가 자연스럽게 2차원이나 3차원을 넘어서(필요에 따라서는 무한 차원까지도) 확장된다는 것을 본 것이다. 따라서 벡터 공간, 선형 직교변환, 그리고 그런 것들의 행렬표현을 통하여 효과적인 대수적인 형식화(formalization)를 갖게 된 것이다.

7. 수반변환(Adjoints)

우리가 지금까지 보아온 바와 같이, 어떤 선형변환 $T: E \to E$도 쌍대, $T^*: E^* \to E^*$를 가진다. 그러나 만약에 E가 내적공간이면, E는 E에 속하는 모든 벡터를 "벡터 v 와의 내적", $v \cdot -$, 형태의 선형함수로 나타냄으로써 E^*와 동일시할 수 있다. 그러면 쌍대 T^*의 정의에 의해서, T^*v는 합성함수 $v \cdot T$가 된다. 다시 말해서 E에 속하는 모든 u 에 대하여 다음 식이 성립한다.

$$(T^* v) \cdot u = v \cdot Tu \qquad (1)$$

그런데 벡터는 이 벡터와 다른 모든 벡터 u 와의 내적이 주어짐으로써 정의되므로 이 방정식은

$T^*\mathrm{v}$를 정의한다. 따라서 선형변환 T^*도 정의된다. 이것을 T의 **수반변환**(adjoint)이라고 한다. 식 (1)의 정의는 때로는 내적에 관한 아래의 괄호 표현법을 이용하여 다음과 같이 쓰기도 한다.

$$< T^*\mathrm{v}, \mathrm{u}> \; = \; < \mathrm{v}, T\mathrm{u} > \qquad (2)$$

이제 T가 정규직교기저 u_i에 관하여 성분이 a_{ij}인, 행렬 A로 주어졌다고 하자. 그러면 제2절의 식 (1)에서와 같이 $T\mathrm{u}_j = \sum \mathrm{u}_i a_{ij}$이다. 그런데 $\mathrm{u}_k \cdot \mathrm{u}_i = \delta_{ki}$이므로 위의 정의 (1)에 의해 다음과 같이 쓸 수가 있다.

$$(T^*\mathrm{u}_k) \cdot \mathrm{u}_j = \mathrm{u}_k \cdot T\mathrm{u}_j = \mathrm{u}_k \cdot \sum_i \mathrm{u}_i a_{ij} = a_{kj}$$

같은 이유로 다음 식도 성립한다.

$$\left[\sum_i \mathrm{u}_i a_{ki}\right] \cdot \mathrm{u}_j = a_{kj}, \quad j,k = 1,\ldots,n$$

따라서 $T^*\mathrm{u}_k = \sum \mathrm{u}_i a_{ki}$이다. 다시 말해 T^*는 ij번째 성분이 a_{ji}가 되는 전치행렬 A^T로 주어진다. 즉, 수반변환은 (직교하는 기저에 대한) 전치행렬로 표현된다. 이것이 전치행렬의 본질을 보여주는 성질이다.

수반변환은 동차인 2계 선형미분방정식에서 나타난다. 그러한 방정식은 $L(y) = 0$로 나타낼 수 있는데 여기서 y는 x의 (매끄러운) 함수이며, $'$는 d/dx를 나타내고 L은 다음과 같은 미분 연산자이다.

$$L(y) = (py')' + ry' + qy$$

여기서 p, q, r은 x의 (suitable) 함수이다. 고전적인 교과서(Frank-von Mises [1930], 363쪽)에서는 함수 z상의 "수반변환" 연산자가 아래와 같다고 가르친다.

$$M(z) = (pz')' - (rz)' + qy$$

좀 더 개념적으로 보면 L과 M이라는 것은, 적당한 함수공간상에서 함수 y와 z의 내적이 함수 곱인 yz를, x에 대하여 구간 (a,b)에서, 적분한 것으로 여기는 선형연산자로 보면 된다. 만약에 y와 z가 구간의 양끝에서 그 값이 0이 된다면 부분적분에 의해 다음 식이 성립하는 것을 알 수 있다.

$$\int_a^b L(y)z = \int_a^b yM(z)$$

따라서 L은 (1)식의 의미에서 정확히 M의 수반변환이다. 편미분 연산자에 대해 대응하는 개념

은 가우스-그린-스토크스(Gauss-Green-Stokes)의 개념을 포함한다. 이 개념은 힐버트 공간을 양자역학에 이용하는데 필수적인 개념으로 알려져 있다. 이제 유한 차원의 내적 공간 E의 경우로 돌아가자.

선형 자기준동형 $T: E \to E$는 $T^* = T$일 때 **자기수반(self adjoint)변환**이 된다. 말하자면 직교하는 기저로 나타내진 T의 행렬표현 A가 대칭이면 (전치행렬과 자신이 같을 때) 자기 수반행렬이 된다. 따라서 내적 공간 E에서 다음 정리가 성립된다.

정 리 자기 수반 변환 $T: E \to E$의 (모든) 행렬표현의 고유값은 실수이다.

이것을 증명하기 위해서는 복소수의 이용이 꼭 필요하다. 이 때, T의 행렬표현인 실 대칭행렬 A를 이용하는 것이 편리하다. 우선, 대수학의 기본 정리에 의하여 A의 특성방정식 $|A - I\lambda| = 0$은 (n개의) 복소수 해를 가진다. 이 해들은 A의 고유값들이다. 그러한 고유값 중에서 하나의 고유값 λ를 선택하자. 우리는 이 고유값에 대하여 $A\mathrm{x} = \mathrm{x}\lambda$의 관계를 만족시키는 0이 아닌 복소수 열 벡터 x를 구할 수 있다. 이제 $*$를 행렬을 전치시킨 후 그 성분들을 모두 켤레복소수로 바꾸는 연산자라고 하자(conjugate transpose). 그러면 x^*는 행 벡터이며 A^*는 실수이고 대칭이므로 $A^* = A$가 되어 $\mathrm{x}^* A^* = \lambda^* \mathrm{x}^*$ 라고 쓸 수 있다. 이제, 행렬의 곱셈에 분배법칙을 적용하면 다음 식이 된다는 것을 알 수 있다.

$$(\mathrm{x}^* A)\mathrm{x} = \mathrm{x}^*(A\mathrm{x})$$

그런데 $A\mathrm{x} = \mathrm{x}\lambda$이고 $\mathrm{x}^* A^* = \lambda^* \mathrm{x}^*$이므로 위 식은 다음과 같이 고쳐 쓸 수 있다.

$$\lambda^*(\mathrm{x}^*\mathrm{x}) = \lambda(\mathrm{x}^*\mathrm{x})$$

그런데 $\mathrm{x} \neq 0$ 이고, $\mathrm{x}^*\mathrm{x} \neq 0$ 이므로 $\overline{\lambda} = \lambda^* = \lambda$ 이어야 한다. 따라서 고유값 λ는 정리의 내용과 같이 실수이어야 한다.

이 증명에서, 원래 행렬 A은 실수 벡터공간 E의 자기준동형사상 $\mathrm{x} \mapsto A\mathrm{x}$를 주었다. 우리는 그것을 이용하여 같은 차원의 복소수 벡터공간 E'의 자기준동형사상, $\mathrm{x} \mapsto A\mathrm{x}$로 바꾸어서 생각했다. 이러한 체의 교환은 E의 기저를 이용하여 이루어진 것인데, 궁극적으로는 기저를 사용하지 않고 어떤 경우에도 이 변환을 묘사하는 것이 바람직하다. 이런 방법에 대하여는 곧 보게 될 제9절에서 다룰 것이다.

8. 주축정리 (The Principal Axis Theorem)

평면상의 해석기하학에서 타원과 쌍곡선은 모두 다음 방정식으로 나타내지는 궤적으로 설명할 수 있다 (타원인 경우에는 아래 부호가 +, 쌍곡선인 경우에는 - 이다).

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (1)$$

교차항이 있는 좀 더 일반적인 아래 2차식(quadratic equation)의 자취는 무엇일까?

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = 1\ ? \qquad (2)$$

이 방정식은 행렬을 이용하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$[x,\ y]\begin{bmatrix} a\ b \\ b\ c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 1 \qquad (3)$$

위 식의 가운데 있는 2×2 대칭행렬을 A라고 하자. 이 2차형식의 좌표축을 회전시키는 것으로 (1)식과 같이 행렬 A가 대각화되어 간단한 모양이 될 수 있을까? 맞다. 좌표축을 나타내는 열벡터에다 직교행렬 P를 곱하면 좌표축을 회전하는 역할을 한다. 이 변환의 결과는 (2)식의 행렬 A를 P^TAP로 치환한 것과 같다. 그런데 P가 직교행렬이므로 $P^{-1} = P^T$ 이다. 따라서 A를 닮은행렬 $P^{-1}AP$로 치환한 셈이다. 이것은 A를 식(2)로 표현된 2차형식의 계수가 아니라 (자기수반)변환의 행렬로 생각한다는 것을 말한다.

정 리 1 내적 공간에서, 각각의 자기수반 **변환** $T: E \to E$**는** (벡터공간 E의 적당한 정규직교 기저에 대한) **대각선 행렬 표현을 갖는다.**

이 정리의 내용은 (2)식으로 주어진 방정식이 새로운 좌표계 x' 와 y' 에서는 2×2 행렬인 A의 두 고유값 λ와 μ를 이용하여 다음과 같이 쓸 수 있다는 것을 의미한다.

$$\lambda x'^2 + \mu y'^2 = 1$$

위 식은 만약 **두 고유값이 0보다 크면** 이 방정식으로 나타내지는 궤적은 **타원**이고, λ > 0 **이고,** μ < 0 **이면 쌍곡선**이 된다. 그러나 만약에 두 개의 고유값이 모두 0 보다 작으면 이 방정식을 만족시키는 궤적은 없다. 그러나 μ = 0 이고, λ > 0 이면 이 방정식을 만족시키는 궤적은 $x' = \lambda^{-1/2}$ 인 **직선**이다. 따라서 (2)식은 어떤 경우에도 정리에 따라 (reflection과) 좌표축을 회전시킴으로써 주어진 곡선을 주축으로 변환시킬 수 있다.

임의의 n차원 벡터공간 E에서 이 정리를 증명하기 위해서 자기수반변환 T의 실수 고유값 λ를 취하자. 이 고유값에 대응하는 (크기가 1인) 고유벡터를 구한다. 다음 이 벡터를 포함하는 벡터공간 E의 정규기저의 첫 번째 벡터라고 하자. 그러면 변환 T의 행렬표현 A는 이 새로운 기저에서 좌표축 $(1, \cdots, 0)$에 대한 고유벡터를 $(\lambda, 0, \cdots, 0)$로 갖는다. 따라서 이 벡터 $(\lambda, 0, \cdots, 0)$는 행렬표현 A의 첫 번째 열이 되어 행렬표현 A는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & & & \\ \cdot & & B & \\ \cdot & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

여기서 B는 $(n-1)\times(n-1)$인 행렬이다. 그런데 A는 대칭행렬이므로 이 행렬의 첫 번째 행은 $(\lambda, 0, \cdots, 0)$ 이어야 하고, 행렬 B도 대칭이어야 한다. 귀납법을 B에 적용하면 우리가 원하는 결과를 얻을 수 있다.
이 정리를 때로는 **주축정리**(principal axis theorem)라고 부른다. 왜냐하면 이 정리는 주축이 중요한 기하학적 의미를 가지는 타원, 쌍곡선, 그리고 3차원인 타원체나 쌍곡면체에 주로 응용되기 때문이다. 이 정리는 다음과 같이 두 가지 방법으로 행렬에 대한 정리로 쉽게 표현 할 수도 있다.

모든 실수 대칭행렬 A에 대하여 $P^{-1}AP$ (또는 P^TAP) 가 대각선행렬이 되게 하는 직교행렬 P가 존재한다. 이 대각선행렬의 대각선 성분들은 고유값들이다. 한 경우는 A가 **자기수반변환** T**의 행렬표현인 경우**이고 다른 경우는 A가 **이차형식**(quadratic form)**의 형태,** $\mathrm{x}^TA\mathrm{x} = \sum x_i a_{ij} x_j$ **를 나타내는 행렬**인 경우이다. 따라서 이 정리에 의하면 모든 이차형식은 축변환에 의해 대각화할 수 있다는 것을 의미한다. 이것은 (행렬에 관한) 하나의 결과가 변환과 이차형식이라는 서로 다른 기하학적 의미를 가질 수 있음을 보여주는 대표적인 예이다. 정리 1을 다른 방법으로 표현하기도 한다. 자기수반 변환 $T: E \to E$의 각각의 고유값 λ에 대하여 이 고유값에 대응하는 모든 고유벡터들이 생성한 부분공간(고유공간, eigenspace) E_λ를 생각해 보자. 이 부분공간은 적어도 1차원 이상의 차원을 가진다. 사실 이 경우에 공간 E_λ의 차원은 고유값 λ의 "기하적 중복도(multiplicity)"라고 한다. 따라서 기하적 중복도란 고유값 λ에 대응하는 1차독립인 고유벡터들의 개수이다. 그런데 자기수반 변환의 경우 이 개수가 대응하는 특성방정식에서 λ의 중근의 개수인 "대수적 중복도(multiplicity)"와 일치한다. 따라서 벡터공간 E의 차원이 n이라면 n개의 1차독립인 고유벡터가 존재한다. 이 정리는 E에 속하는 모든 벡터 v는 E_λ에 속하는 벡터 v_λ들의 합 $\sum_\lambda \mathrm{v}_\lambda$로 나타낼 수 있다는 의미로 정리할 수 있다. 이것은 공간 E가 부분공간 E_λ의 **직합**(direct sum)이라는 것을 나타낸다. 무한차원의 경우에는 이러한 성질을 나타내기 위해서 좀 더 복잡한 설명이 필요한데, 이것을 **스펙트랄 정리**(spectral theorem)라고 한다. 모든 이런 결과들의 적절한 버전은 성분을 (스칼라 체를) 복소수로 갖는 벡터공간에 모두 적용된다. 이 경우 대칭행렬이 아니라 **허미시안**(Hermitian) 행렬 $(A^* = \overline{A^T} = A)$에 대하여 같은 이론이 전개되며 특히 함수 해석학과 관련이 깊다.

9. 쌍선형과 텐서곱 (Bilinearity and Tensor Products)

<하나의 행렬을 보면 그 행렬이 벡터이기도 하고 함수(선형변환)이기도 하다는 것 뿐만 아니라 만일 기저를 바꾸면 그 행렬이 어떻게 변할지도 생각해야 한다. 미적분학(다변수)과 선형대수를

배경으로 우선 텐서에 대한 기초 지식을 알아보자. 수학이나 물리학에서 나오는 많은 양(quantity)들은 함수와 같은 존재이다. 텐서란 이미 가지고 있는 개념을 수치적으로 표현할 때 꼭 겪는 복잡함을 이해하고 말하는 방법이다.

우선 대수적인 텐서는 벡터공간에서, 벡터들의 곱의 일종이다. 이 곱은 보통 알고 있는 곱들을 포함하는, 더 일반화된 개념으로서 우리가 보통 곱셈이 갖고 있다고 생각하는 최소한의 조건만을 가지는, 일반화된 곱셈이다. 따라서 우리가 생각하는 모든 곱셈들은 이 곱셈의 특수한 경우가 된다. 텐서를 이용하여 리만기하학을 공부해 보면, 우선 기하학에서 어떤 텐서가 중요한 가 하는 문제의 답을 구하고, 이들 사이의 관계(미분, 적분, 내적등의 텐서에 대한 공식)의 기하학적 의미는 무엇인가 하는 문제에 답을 찾는 것이 목표가 될 수 있다. 기하학에서는 곡률이 텐서의 개념이며, 물리학에서도 질량, 스트레스 텐서, 운동량등이 텐서 개념이다. 그 과정에서 "오일러지표는 어떤 텐서의 적분으로 나타낼 수 있다"는 Gauss-Bonnet의 정리와 같은 위상수학의 논의도 펼쳐진다. 이번 절에서는 텐서곱(tensor product)만 다루게 될 것이다. - 이상구>

같은 체상의 세 개의 벡터공간 U, V, W에 대하여 다음과 같은 함수를 생각해 보자.

$$B: U\times V \to W \tag{1}$$

이 때 $B(\mathrm{u},\mathrm{v})$가, 각각의 고정된 벡터 v에 대하여, U에 속하는 벡터에 선형이고, 각각의 고정된 벡터 u에 대하여 V에 속하는 벡터에 대하여 선형이면 이 함수는 **쌍선형**(bilinear)이라고 한다. 식 (5.7)의 내적은 쌍선형의 좋은 예이다. **(1)식으로 나타내진 모든 쌍선형함수** B는 < $U\times V$로부터 U와 V의 **텐서곱**(tensor product)이라고 부르는 새로운 공간으로 가는> **하나의 쌍선형함수, ⊗ 와 다른 선형함수들로 나타낼 수 있다.** 이 새로운 공간의 성질은 기하학이나 대수학의 다양한 문제를 다루는데 매우 유용하게 쓰인다. 이러한 공간의 존재는 다음 정리로 확인할 수 있다.

정 리 1 *체 F 상의 두 개의 벡터공간을 U와 V라 하면, 아래의 성질을 만족하는 세 번째 벡터공간 $U\otimes V$와 다음과 같은 선형함수가 존재한다.*

$$\otimes: U\times V \to U\otimes V \tag{2}$$

*여기서 (1)식의 B**가** U와 V에서 (체 F 상의) 제 3의 벡터공간 W로의 **쌍선형함수 이기만 하면,** 모든 $\mathrm{u}\in U$와 $\mathrm{v}\in V$에 대하여 다음 식을 만족하는 **유일한 선형변환** $T: U\otimes V \to W$ **가 존재한다.***

$$B(\mathrm{u},\mathrm{v}) = T(\mathrm{u}\otimes \mathrm{v}) \tag{3}$$

*이 의미는 아래 도표에 잘 보여진다. 즉, 새로운 쌍선형함수 ⊗가, "어떠한 (old) 쌍선형함수 B에 대해서도 $T\otimes = B$가 되는 (그림에서 점선으로 표시된) 유일한 선형함수 T가 존재한다는," 성질을 갖고 있다는 것을 의미한다: 이 말은, **아래 다이어그램이 "가환(commute)" 임을 말한다.***

$$\begin{tikzcd} U\times V \arrow[r, "\otimes"] \arrow[dr, "B"'] & U\otimes V \arrow[d, dashed, "T"] \arrow[d, phantom, shift left=8ex, "\exists!\ T"] \\ & W \end{tikzcd} \qquad (4)$$

이 정리의 위력은 **쌍선형함수 B의 연구를 언제든 (우리가 더 잘 알고 또 다루는데 훨씬 익숙한) 선형함수 T의 연구로 줄일 수 있다는 데 있다.** 각각의 쌍선형함수 B는 하나의 쌍선형함수 $\otimes$로부터 -유일하게- 얻어낼 수 있으므로 이 단 하나의 쌍선형함수 $\otimes$를 **유니버샬**(universal)함수라고 부르는 것이 적절하다. 특히, 주어진 벡터공간 U와 V에 대하여 유니버샬이다.

이제 텐서곱 공간(tensor product space)을 건설하자. 앞에서 우리가 쌍대공간 $V^* = \hom(V, F)$과 선형변환(행렬)들의 공간 $\hom(V, W)$를 건설한 것과 마찬가지로, 모든 쌍선형함수 $B: U\times V \to W$의 공간,

$$\mathrm{Bilin}(U,\ V;\ W)$$

이 필요하다. 그러나 정리에 의해, 도표 (4)의 전단사함수 $B \mapsto T$는 이 공간을 이미 벡터공간의 동형사상에 의해 만들었던 공간으로 단순화시킨다.

$$\mathrm{Bilin}(U,\ V:\ W) \quad \cong \quad \hom(U\otimes V;\ W) \qquad (5)$$

이 결과는 "쌍선형함수는 $U\otimes V$에 의해서 표현된다(represented, objectified)"라고 쓸 수 있다. 삼선형(trilinear)함수에 대해서도 비슷한 표현이 존재한다.

도표 (4)에서 나타난 유니버샬 쌍선형함수 $\otimes$를 만드는 방법을 이야기하기 전에 도표 (4)에 나타난 성질만 가지고 있다면 이 함수가 어떤 방법에 의해 만들어지더라도 아무 문제가 없음을 우선 살펴보기로 하자. 다시 말해 이 함수는 함수가 가지고 있는 성질이 중요할 뿐이고 공간 $U\otimes V$의 특정한 원소들의 문제가 아니라는 것이다. 이것을 좀 더 자세히 이야기하기 위해 이제 우리가 서로 다른 공간, 말하자면 $U\otimes V$와 $U\,\square\, V$로의 변환을 나타내는 두 개의 유니버샬 쌍선형함수, $\otimes$와 $\square$가 있다고 가정하자. 그러면 두 함수 $\otimes$와 $\square$가 모두 쌍선형이고 유니버샬인 아래의 도표를 갖게 된다.

$$\begin{tikzcd} U\times V \arrow[r, "\otimes"] \arrow[d, equal] & U\otimes V \arrow[d, dashed, shift left, "T"] \arrow[loop right, dashed, "S\cdot T"] \\ U\times V \arrow[r, "\square"] & U\,\square\, V \arrow[u, dashed, shift left, "S"] \end{tikzcd} \qquad (6)$$

이제 $\otimes$가 유니버샬이므로 이것은 $\square$에 대하여도 유니버샬이다. 따라서 $T\otimes = \square$인 선형 T가 존재한다. 마찬가지로 $\square$가 유니버샬이므로 $S\square = \otimes$인 선형 S가 존재한다. 이것은 합성함수, $S \cdot T: U \otimes V \to U \otimes V$가 $(S \cdot T)\otimes = \otimes$를 가짐을 의미한다. 그러나 $U \otimes V$의 항등사상 1은 $1\otimes = \otimes$ 라는 성질을 가진다. 반면에 $\otimes$에 관한 유니버샬의 정의는 그러한 선형 사상이 단 하나만 존재하도록 하고 있다. 따라서 $S \cdot T$는 $U \otimes V$의 항등사상 1과 동일해야 한다. 이와 똑같은 논의에 의해 $T \cdot S$는 2번째 공간 $U \square V$상의 항등사상이다. 다시 말해서 S는 T의 (좌, 우) 역사상이다. 따라서 T는 동형사상이 된다. 두 개의 공간 $U \otimes V$와 $U \square V$는 동형이며, 동형사상은 첫 번째 공간의 유니버샬 쌍선형 $\otimes$ 를 두 번째 공간의 $\square$ 으로 보낸다.

그러나 이것은 단지 유니버샬 쌍선형함수에 관한 논의일 뿐 아니라, 어떤 것이 유니버샬이냐 아니냐에 관한 논의라는 점에 유의해야 한다. 다른 예는 이미 우리가 다룬 바 있다. 제5장 8절에서 두 그룹의 자유곱(free product) $A * G$가 A와 G의 원소들로 나타내지는 단어(words) $a_1 g_1 \cdots a_n g_n$와 같은 원소들을 갖는다고 정의하였다. (이 부분은 카테고리이론 참조) 그리고 두 그룹의 준 동형, $k_1: A \to A*G \leftarrow G$과 아래 식으로 나타내지는 A와 G로 부터 제3의 그룹 H로의 모든 준동형의 쌍 사이에서 유니버샬인 k_2가 존재한다.

$$A \to H \leftarrow G$$

텐서의 곱을 다루었던 논의는 준동형 k_1과 k_2를 가지는 자유곱, $A * G$가 이 유니버샬의 성질에 의해, k_1과 k_2에 대응하는 동형사상으로 유일하게 결정된다는 것을 보여준다. 다시 말해서 자유곱 $A * G$에 관한 문제는 단어를 이용한 구체적인 건설이 아니라 이 유니버샬한 성질이다.

$A \leftarrow A \times G \to G$ 인 두 그룹의 직적(direct product) $A \times G$이 유니버샬 성질을 갖는 것을 보여준 것을 상기해 보자(제8장 2절의 식(2) 참조). 다시 말해서 군 (또는 벡터공간)의 곱은 순서쌍으로 만들어지는 것은 아니다. 실제로, 유니버샬 성질만을 만족한다고 하면, 어떤 다른 건설도 가능한 것이다!

이제 (2)에서와 같이 공간의 텐서곱 $\otimes$의 구성을 체계적으로 해보자. U와 V가 각각 기저 $\mathrm{u}_1, \ldots, \mathrm{u}_m$과 $\mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{v}_n$를 갖는 유한차원의 벡터공간이라고 하자. 우선 $i = 1, \cdots, m$ 그리고 $j = 1, \cdots, n$인 i, j에 대하여 mn개의 부호 $\mathrm{u}_i \otimes \mathrm{v}_j$를 취한 후 이 기호들을 기저로 하는 새로운 벡터공간 $U \otimes V \cong F^{mn}$을 만들자. 그러면 이 공간에서의 벡터는 일차결합인 $\sum a_{ij}(\mathrm{u}_i \otimes \mathrm{v}_j)$이 된다. 이제 임의의 벡터공간 W에 대하여 쌍선형인 B를 생각해 보면 쌍선형의 성질에 의해 기저벡터에서의 값, $B(\mathrm{u}_i, \mathrm{v}_j)$를 알면 B의 값은 모두 결정된다. 이제 다음 방법으로 T를 정의하면,

$$T\left(\sum a_{ij}(\mathrm{u}_i \otimes \mathrm{v}_j)\right) = \sum_{i,j} a_{ij} B(\mathrm{u}_i, \mathrm{v}_j)$$

우리가 원하는 성질인 $T\otimes = B$의 성질을 가지는 선형 사상 $T: U \otimes V \to W$를 얻을 수 있다. 분명히 T는 이러한 성질을 가지는 유일한 선형사상이다.

이번 T의 건설에서는 임의로 선택된 기저를 사용하였다. 그러나 앞에서 살펴 본 바와 같이 다른 기저를 사용하여도 같은(동형) 결과를 얻게 된다. 이 건설과정은 (유한 차원 공간들의) 텐서

곱에 아래와 같은 차원 사이의 관계를 준다.

$$\dim(U\otimes V) = (\dim U)(\dim V) \tag{7}$$

이 건설은 유니버샬 쌍선형함수 ⊗는 텐서곱에서 “곱 벡터”, $\mathrm{u}\otimes\mathrm{v}$를 만들어낸다는 것을 보여준다. 이 곱 벡터는 $U\otimes V$를 생성(span)한다. 그러나 $U\otimes V$는 단순히 $\mathrm{u}\otimes\mathrm{v}$뿐만 아니라, 그러한 곱들의 일차결합인 많은 일반적인 벡터들을 원소로 갖는다.

무한차원 공간 U(또는 V)에 대하여 이와 매우 비슷한 증명에 의해 텐서곱 $U\otimes V$가 존재한다는 것을 알 수 있다. (Zorn의 보조정리를 이용하면 무한 차원 벡터공간을 포함하는) **모든 벡터공간은 기저를 갖는다는 것을 증명할 수 있으며, 그 벡터공간의 모든 벡터는 유한 개의 기저벡터의 일차결합으로 유일하게 나타낼 수 있다는 것도 증명할 수 있다.** 기저를 사용하지 않는 좀 더 불변적인 $U\otimes V$의 건설은 다음 절에서 다룰 것이다.

텐서곱은 (스칼라) “체의 교환”도 가능하게 한다. 예를 들면 복소수체 $\mathbb{C}$는 실수체 $\mathbb{R}$상의 2차원 벡터공간이다. 임의의 실수 벡터공간 V에 대하여 텐서곱 $V\otimes\mathbb{C}$는 $\mathbb{C}$에 의한 (우측) 스칼라배를 갖는다. 따라서 사상 $V\mapsto V\otimes\mathbb{C}$는, 7절에서 필요했듯이, 실벡터공간 V를 같은 차원의 복소벡터공간으로 바꾼다.

하나의 벡터공간 V와 쌍대공간 V^*를 이용하여 하나의 반변지표(contravariant indices)와 두 개의 공변지표(covariant indices)를 갖는 - 혼합 텐서의 공간 $V^*\otimes V\otimes V$ 과 같은 - 모든 종류의 텐서공간을 만들어낼 수 있다. V의 기저 $\mathrm{u}^1,\ldots,\mathrm{u}^n$가 주어지면, V^*의 쌍대기저 $\mathrm{u}_1,\ldots,\mathrm{u}_m$도 자연스레 결정된다. 따라서 위의 경우에는 n^3 벡터 $\mathrm{u}_i\otimes\mathrm{u}^j\otimes\mathrm{u}^k$들로 이루어진 $V^*\otimes V\otimes V$의 기저가 결정된다. 그러면, 하나의 기저로부터 다른 기저로의 좌표변환를 나타내는 식을 유도할 수도 있을 것이다. 그런 식은 텐서가 무엇인가를 정의하는데 이미 한 번 사용된 적도 있다. 그러나, 텐서곱 그 자신은 불변(invariant) 정의를 이용하여, 이러한 정의를 피해 갈 수 있었었다. 내적공간 $V=E$에도 표준동형사상, $E\cong E^*$에 기초해서 위의 지수를 아래의 지수로 바꾸는 식이 있다.

이 외에도 텐서곱의 많은 유용한 성질이 있다. 예를 들어 만일 $T: U\to U'$와 $S: V\to V'$가 두 개의 선형변환이면 $<\mathrm{u},\mathrm{v}>\mapsto T_{\mathrm{u}}\otimes S_{\mathrm{v}}$는 쌍선형 함수 $U\otimes V\to U'\otimes V'$가 된다. 따라서 유니버샬 성질(universality)에 의하여 $(T\otimes S)(\mathrm{u}\otimes\mathrm{v}) = T\mathrm{u}\otimes S\mathrm{v}$를 만족하는 대응하는 선형함수,

$$T\otimes S: U\otimes V \to U'\otimes V' \tag{8}$$

가 존재한다. 다시 말해서, 텐서곱 연산은 단지 공간에만 적용되는 것이 아니라 공간들 사이의 선형변환에도 적용된다. 이런 성질을 **평토적 성질**(functorial) 이라고 한다 (제12장).

세 개의 벡터 공간에서의 텐서의 3중곱, $U\otimes(V\otimes W)$은 $U\times V\times W$ 에서 삼선형(trilinear)인 함수 중에서 유니버샬 삼선형함수, $(\mathrm{u},\mathrm{v},\mathrm{w})\mapsto\mathrm{u}\otimes(\mathrm{v}\otimes\mathrm{w})$를 만들어 낸다. 이제 결합법칙을 쓰면 $(\mathrm{u}\otimes\mathrm{v})\otimes\mathrm{w}$는 공간 $U\otimes(V\otimes W)$에서 유니버샬 삼선형함수이다. 유니버샬 성질이 (동형사상을 고려하면) 공간을 완전히 결정하므로, 다음과 같이 나타내지는 동형사상이 존재한다.

$$U\otimes(V\otimes W)\cong(U\otimes V)\otimes W,\quad \mathrm{u}\otimes(\mathrm{v}\otimes\mathrm{w})\mapsto(\mathrm{u}\otimes\mathrm{v})\otimes\mathrm{w} \tag{9}$$

이런 두 공간은 위의 동형사상에 의해 구분하는 것이 편리하다-그러면 벡터들의 텐서곱은 결합법칙이라는 유용한 성질을 갖게 된다.

10. 상(Factor)에 의한 크기의 축소(Collapse)

이 장에서, 우리는 선형사상을 다룬다. 이를 위하여 선형사상을 건설하는 방법을 알 필요가 있다; 그런 한 방법이 주어진 벡터공간을 상(商, quotient, factor)공간으로 나누는(collapse) 과정이다.

정수 m을 모듈로(modulo, 법)로 하는 정수의 합동(congruence)에 대한 연구를 위해서는 우선 (제2장 8절에서 기술한 것과 같이) 정수 환 $\mathbb{Z}$로부터, 대응하는 준동형사상 $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_m$ 을 가진, 모듈로가 정수 m인 환 $\mathbb{Z}_m$ 을 구성한다. 이 준동형사상(또는 정사영)의 효과는 정수 m의 모든 상수배를 0으로 보내는 것이다 - 실로, m의 모든 상수배로 이루어진 집합을 0으로 보내는 것이다. 군에서도 마찬가지로 상군(factor group) G/N은 정규 부분군 N의 모든 성분을 영원으로 보낸다(collapse).

같은 방법이 벡터공간에도 적용된다. 만약에 특별한 벡터, u_0나 이 벡터의 상수배를 무시하고 싶으면. 이 벡터의 상수배들 만으로 이루어진 부분공간의 원을 모두 영원으로 보내는 사상을 생각하면 된다. 예를 들면, 직교좌표계의 3차원 공간에서 $xy-$ 평면으로의 정사영(projection)은 단위벡터 z의 모든 곱을 0으로 보낸다. 이와 같은 방법은 일반적으로 V의 임의의 부분공간 S에도 적용할 수 있다. **상공간**(quotient space)이라고 불리는 새로운 공간 V/S와 $P(S)=0$이며 유니버샬 성질을 갖는 선형사상 $P: V \rightarrow V/S$이 존재한다. $T(S)=0$이면서 제3의 벡터공간 W로의 모든 선형변환 $T: V \rightarrow W$는, 다음과 같은 가환 도표(commutative diagram)에서 보듯이 유일한 선형변환 $T': V/S \rightarrow W$를 이용하여, 합성변환 $T = T'P$로 나타낼 수 있다;

$$
\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "P"] \arrow[dr, "T"'] & V/S \quad P(S)=0 \arrow[d, dashed, "T'"] \\
 & W \quad T(S)=0
\end{tikzcd}
\qquad (1)
$$

이것은 V에 속하는 벡터 v와 S에 속하는 모든 s들의 벡터 합인 $\mathrm{s}+\mathrm{v}$들로 이루어진 "잉여류 (coset)" $S+\mathrm{v}$로의 사상 P를 취하면 증명할 수 있다. 이 잉여류는 $(S+\mathrm{v})+(S+\mathrm{w})=S+(\mathrm{v}+\mathrm{w})$로 주어진 덧셈연산 등에 의해 벡터공간을 형성한다. 본질적으로 각 잉여류 $S+\mathrm{v}$는 $\mathrm{v}'-\mathrm{v}$가 S에 속하는 모든 벡터 $\mathrm{v}' \in V$들로 이루어졌기 때문에 (즉, $\mathrm{v}' \equiv \mathrm{v} (\mathrm{mod}\ S)$), 이 잉여류는 모듈로 m인 정수들을 구성하는 데 사용되었던 모듈로 m인 합동류 $C_m(a)$ 와 같다. 그러나 (1)의 유니버샬 성질이 성립되면 **상공간** V/S의 성분이 어떻게 기술되었는가 하는 것은 문제가 되지 않는다. 왜냐하면 상(quotient)에 대한 모든 것을 공식적으로 만드는 것은 이 유니버샬 성질 때문이다. (그리고 상이 벡터공간의 동형사상의 범위 내에서 유일하다는 것을 증명하는 것도 유니버샬 성질이다.)

이 결과는 공간 V안의 임의의 벡터의 집합 $\mathrm{s}_1, \ldots, \mathrm{s}_k$ 이 주어지면, 그들에 의해 생성되는 부분

공간 S의 모든 원을 영원으로 생각할 수 있게 해 준다; 즉, s_i들에 의하여 생성된 부분공간에 대하여, 각각의 s_i를 영벡터로 보내는 변환 T는 그 부분공간의 모든 원을 영벡터로 보내게 된다.

이 과정을 이용하는 가장 전형적인 예로, 두 개의 벡터 공간 U와 V의 새로운 텐서곱 $U \otimes V$를 들어보자. $u \in U$ 이고 $v \in V$인 모든 벡터들의 쌍, $< u, v >$를 취하여 이 각 쌍의 곱을 $u \cdot v$로 나타내기로 한다. 그리고 모든 이런 쌍 $u \cdot v$를 기저로 하는 (아주 큰) 공간 L을 만들자; 그러면 L은 체 F에 속하는 계수를 갖는 $u_i \cdot v_j$의 모든 유한 일차결합으로 이루어진다. 그러면 $< u, v > \mapsto u \cdot v$는 함수 $F: U \times V \to L$가 된다, 그러나 이것은 쌍선형은 아니다. 그러나, F가 쌍선형이면 0이 되어야만 하는 L안의 모든 원소를 F가 0으로 만들어 버리면, 간단하게 F를 쌍선형으로 만들 수 있다. 즉, 다음 식으로 나타내지는 모든 원소를 0으로 만들어 버리면 된다.

$$(a_1 u_1 + a_2 u_2) \cdot v - a_1(u_1 \cdot v) - a_2(u_2 \cdot v) \qquad (2)$$

그리고 두 번째 항 v도 선형성 때문에 마찬가지로 하면 된다. 이제 F는 이렇게 만든 공간에서 쌍선형함수 $U \times V \to L/S$가 된다. 이것이 유니버샬이며, (construction) L/S는 실제로 **텐서곱**(tensor product)이라는 것을 증명할 수 있다.

이 예는 유한차원 공간을 만들기 위해 무한차원 공간이 이용되는 방법을 보여준다. 그리고 이는 또한 결과적으로는 같은 텐서곱을 만드는 데 여러 가지 (formal한) 방법이 있다는 것도 보여준다.

수학에서는 다른 구조체를 만들 때도 이와 같은 기법(즉, collapse 기법)을 사용한다. 각 경우에는 우선 무엇을 가지고 상공간을 만들 것인가를 생각해야 한다. 다시 말해 어떤 것이 준동형사상에 의해 0 으로 사상될 수 있는가 알아야 한다는 것이다. 환 R에서 $K \subset R$이고, K에 속하는 k_1과 k_2에 대하여 $k_1 + k_2$도 K에 속하며 또, K에 속하는 k와 R에 속하는 r에 대하여 rk와 kr이 모두 K에 속하는 R의 **이데알**(ideal) K를 정의하자. 환의 모든 준동형사상 $f: R \to S$에서 $f\,k = 0$이고 $k \in R$인 R의 부분집합은 이데알이어야만 한다. 이 이데알을 동형사상의 **핵**(kernel)이라고 부른다. 반대로 환 R안의 이데알 K가 주어지면 환 R/K이 존재하며, K를 핵 안에 포함하는 R에서의 준동형사상 중, 핵이 K인 유니버샬 준동형사상 $R \to R/K$이 존재한다. 이 **상환**(quotient ring)은 K의 잉여류 $K + r$을 취해서 만들 수 있다. 이 과정은 모듈로 m인 정수의 집합 경우에도 적용된다. 왜냐하면, m의 모든 상수배의 집합은 정수환 $\mathbb{Z}$에서 하나의 이데알이기 때문이다. 이것은 또한 실수체 $\mathbb{R}$로부터 복소수를 건설해 내는 과정에도 적용된다. 이런 이유 때문에 우선 실수 계수를 갖는 부호(symbol) x의 다항식들의 집합인 다항식환 R을 만들자. 이 다항식 환에서 $(x^2 + 1)$ 의 모든 상수배로 이루어진 집합은 이데알이다, 이것을 K라 하자. 그러면 상환 R/K는 모든 복소수의 집합(에 동형)이 된다. 왜냐하면 $x^2 + 1$이 0으로 여겨지려면 x가 식 $x^2 = -1$을 만족해야 하므로, 이 과정이 기본적인 복소수인 i를 정의하는 것이다.

이 과정은 복소수에 대한 다른 지식을 사용하지 않고도 갈루아(Galois) 이론이 모두 성립함을 보여준다. 임의의 (abstract) 체 F에서 x의 다항식들은 환 $R = F[x]$을 이룬다. 여기서 하나의 다항식 $f(x)$의 스칼라배(multiple)들은 이데알 (f)을 이룬다. 만일 f가 기약(irreducible)이

면 상환 $R/(f)$는 F와 $f(\xi)=0$을 만족하는 원소, ξ(x 의 잉여류)를 포함하는 체(field)가 된다. 한 마디로 말해서 $R/(f)$는 F와 f의 (하나의) 근(root)에 의해 생성된 체 $F(\xi)$이다; 나머지 근도 같은 방법으로 보태져서(adjoined) 추상적인 분해체(splitting field)와 그것의 갈루아 군을 주게 되는 것이다.

이러한 이데알(ideal)의 개념은, collapses의 유용성 때문에, 정수론과 산술(제12장 3절)에도 많이 이용된다는 것을 알게 될 것이다 .

11. 외적 대수학(Exterior Algebra)과 미분 형식

표면(surface)적분과 체적(volume)적분 사이에서 생각할 수 있는, 미분 형식 (differential forms)과 (가우스-그린-스토크스 정리와 같은) 관계를 다루기 위해서, 다음의 형식적 규칙을 따르는 미분(differential) dx와 dy를 다룰 필요가 있다.

$$(dx)(dy) = -(dy)(dx), \quad (dx)^2 = 0 \tag{1}$$

이 식들은 한 점에서의 코탄젠트 공간 (예를 들어 3 차원의 유클리드 공간) 안의 벡터, dx, dy, dz에 적용할 의도를 가진 규칙이다. 이 식들은 (any) 벡터공간 V에 formal product의 적당한 (0으로 보내는) collapse 를 취하면 얻어지는 대수적인 규칙이므로 조금도 신기할 것이 없다. 이 collapse가 우리를 **외적 대수학**으로 유도한다.

V에서 출발하여 텐서곱을 연속적으로 구하면, 아래와 같은 일련의 벡터공간을 만들어 낸다.

$$F,\ V,\ V\otimes V,\ V\otimes V\otimes V,\ \cdots \tag{2}$$

이들의 원소를 (공변 covariant) **텐서(tensor)**라고 부른다; n-fold 텐서 곱 T_n은 **계수**(rank)가 n인 텐서이며 (underlying) 체 F의 스칼라는 계수가 0인 텐서로 여겨진다. 이러한 모든 텐서를 모으면 아래의 연산법칙을 만족하는 대수체계를 이룰 수 있다: 어떤 텐서에도 스칼라를 곱할 수 있다. 계수가 같으면 어떤 두 텐서도 서로 더할 수 있다; 어떤 두 텐서도 (텐서)곱 ⊗을 이용하여 곱할 수 있다; 예를 들면 텐서 u와 v ⊗w의 곱은 다음과 같다.

$$\mathrm{u}\cdot(\mathrm{v}\otimes\mathrm{w}) = \mathrm{u}\otimes\mathrm{v}\otimes\mathrm{w} \tag{3}$$

이 모든 텐서는, 이 대수적인 연산과 함께, 소위 말하는 **텐서 대수**(tensor algebra) $T(V)$를 이룬다. 이 대수 체계는 계수가 다른 두 텐서는 더하지도 않고 더 할 필요도 없기 때문에 벡터공간(vector space)이 아니다. 같은 이유로 합과 곱의 연산 하에서 환(ring)도 아니다. 기술적으로 이것은 차수붙은 벡터공간(graded vector space) 또는 **차수 붙은 환**(graded ring) 모두를 뜻하는 **차수 붙은 대수**(graded algebra)라고 부른다(저자의 책 “Algebra” 제16장 4절 참조). 독자는 곧 텐서의 3중곱에는 본장 제8절 (9)식에 따라 분배법칙은 적용되는 그런 차수붙은 체계(graded system)에 적용되는 공리를 생각해 낼 수 있을 것이다. 하지만 곱셈에 교환법칙은 성립하지 않는

다.

모든 텐서는 벡터곱의 합이다. 따라서 $T(V)$는 벡터공간 V로부터 생성된다. 이것은 그렇게 만들어진 "가장 일반적인" 차수 붙은 대수이므로 V상의 **차수 붙은 자유대수**(free graded algebra)라고 부른다. 따라서 이것은 다음과 같은 "유니버샬 성질"을 갖는다; 임의의 차수 붙은 대수 A에 대하여, A에서 차수(grade) 1인 원소들의 벡터공간으로의 각각의 선형변환 $V \to A$는 차수 붙은 대수의 사상, $T(V) \to A$로 유일하게 확장될 수 있다. 결과적으로 V에 의해 생성된 그런 A는 텐서 대수 $T(V)$에 상공간을 이용하여 얻을 수 있다.
(1)식의 미분에 대한 차수 붙은 대수를 위하여 우리는$\mathrm{u} \otimes \mathrm{v} = -\mathrm{v} \otimes \mathrm{u}$이고 $\mathrm{u} \otimes \mathrm{u} = 0$라는 규칙을 만족하는 곱셈이 필요하다. 이 식들은 텐서 대수, $T(V)$에서는 성립하지 않는다. 따라서 우리는 $T(V)$의 적당한 상(商, quotient, factor)을 취하게 된다. 따라서 모든 성분 $t \otimes t$ (양수의 계수를 가지는 임의의 텐서)와 $t \otimes t$에 다른 텐서를 곱한 모든 곱을 $T(V)$과 상공간을 이용하여 처리 할 수 있다. 이 결과로 얻어진 상 대수(quotient algebra), $E(V)$는 V의 **외적인 대수**(exterior algebra)라고 부른다. 앞으로 이것의 원소를 e, f, g로 나타내고 두 원소의 곱을 $e \wedge f$로 나타내기로 한다. 이렇게 건설하면, 이 대수는 양의 계수(positive rank)를 가지는 모든 e에 대하여 다음 관계를 만족한다.

$$e \wedge e = 0 \tag{4}$$

그리고 다음 식도 성립한다.

$$0 = (e+f) \wedge (e+f) = e \wedge e + e \wedge f + f \wedge e + f \wedge f$$

그런데 $e \wedge e$와 $f \wedge f$는 0이므로 모든 양의 계수를 가지는 e와 f에 대하여 우리가 원하던 다음 식이 성립한다.

$$e \wedge f = -f \wedge e \tag{5}$$

이런 대수를 좀 더 확실하게 하기 위하여 계수(rank)가 k인 그의 성분들을 $E_k = E_k(V)$로 써서 E_k가 k쌍의 텐서곱, $T_k(V) = V \otimes \cdots \otimes V$의 벡터공간의 상(quotient)이 되게 하자. 그런데 양의 계수 t를 갖는 "제곱들(squares)" $t \otimes t$로만 나누었으므로 계수가 0이거나 1인 것은 아무 것도 영원이 되지는 않는다. 따라서 $E_1(V)$은 단지 $T_1(V) = V$일 뿐이다. 이제 V가 $\mathrm{u}_1, \ldots, \mathrm{u}_n$을 기저로 가지는 유한차원 공간이라고 가정하자. 그러면 $T_k(V)$는 이 기저 벡터의 모든 k개의 텐서곱을 기저로 가지게 된다. $E_k(V)$에서 u_i를 반복해서 곱한 모든 텐서곱은 (4)에 의하여 0이 된다. 반면에 서로 다른 u_i는 (5)에 의하여 서로 교환될 수 있다. 따라서 $E_k(V)$에서 모든 요소는 k차 외부 곱의 일차결합이다.

$$\mathrm{u}_{i_1} \wedge \mathrm{u}_{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{u}_{i_k}, \quad i_1 < i_2 < \cdots < i_k \tag{6}$$

이 식에서 기저벡터는 첨자가 작은 것부터 큰 것으로 곱해 갔다. $k>n$ 인 경우에는 그러한 곱이 존재하지 않는다. 따라서 $k>n$ 인 $E_k(V)$는 0이다. 작은 k에 대해서는 (6) 식의 가능한 $(k,\ n-k)$ 개의 곱들이 기저를 형성한다. 이것은 $n=3$ 인 경우의 예를 들어보면 쉽게 이해할 수 있다. 지금까지 제안한 기저의 원소들을 나열하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} &E_0: && 1 \\ &E_1: && \mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2, \mathrm{u}_3 \\ &E_2: && \mathrm{u}_1 \wedge \mathrm{u}_2, \mathrm{u}_1 \wedge \mathrm{u}_3, \mathrm{u}_2 \wedge \mathrm{u}_3 \\ &E_3: && \mathrm{u}_1 \wedge \mathrm{u}_2 \wedge \mathrm{u}_3 \end{aligned} \tag{7}$$

이런 원소들의 모든 곱은 (4)와 (5)의 규칙에 의해서 계산할 수 있다; 이 규칙들을 이용하여 모든 $\mathrm{t} = a_1\mathrm{u}_1 + a_2\mathrm{u}_2 + a_3\mathrm{u}_3$ 에 대하여 $\mathrm{t} \wedge \mathrm{t} = 0$ 인 것을 증명할 수 있다. 그런데 (7)의 모든 원소를 일차 독립이 되도록 잡으면 위의 작업은 이미 이루어진 셈이다. 따라서 그것들은 $E(V)$ 에서 실제로 일차 독립이다.

$\mathrm{u}_1 = dx$ 이고 $\mathrm{u}_2 = dy$ 이며$\mathrm{u}_3 = dz$ 이어서 $V = \mathbf{R}^3$ 인 경우에, 이 외적 대수는 3개의 변수를 가지는 (더 높은 차원에서도 비슷하게) 미분형식의 계산을 위한 설정을 가능하게 해준다. 외적 대수의 이러한 기하학적 기원(origin)으로부터 기대하지 않았던 부산물도 준다. 성분이 a_{ij} 인 임의의 $n \times n$ 행렬 A 에서 i 번째 행, R_i를 외적 대수의 계수 1인 원소 $R_i = \sum a_i u_j$ 로 생각하자. 그러면 n 행의 외적 곱(exterior product)은 행렬 A 의 행렬식 $|A|$ 를 이용하여 다음과 같이 계산할 수 있다 (n=3인 경우에 대하여 직접 계산해 보라).

$$R_1 \wedge R_2 \wedge \cdots \wedge R_n = |A|\, \mathrm{u}_1 \wedge \mathrm{u}_2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{u}_n \tag{8}$$

실제로 (4)식과 (5)식의 규칙은 행렬식을 계산하는 공식을 다르게 표현한 것이다. 즉 두 개의 열이 같을 때에 행렬식의 값은 0이다 (규칙 (4)). 두 개의 열을 서로 바꾸면 행렬식의 부호가 바뀐다 (규칙 (5)). 결과적으로 외적 대수는 행렬식의 정의를 위해 사용될 수 있으며 행렬식의 성질을 완전하게 이해하는 데 이용될 수 있다 (책 “*Algebra*” 제16장 7절 참조). 행렬식에 대한 이러한 이해는 **행렬식을 정의할 때,** 행렬을 이용하여 정의하는 것이 아니라 A 에 의해 나타내지는 (좀 더 기하학적인) **선형 자기준동형사상**(linear endomorphism)을 이용하여 정의함으로써 **불변적인 형태로 정의하는 것이 가능하다.** 여기에서도 기하학과 행렬 사이의 학문적인 긴장이 다시 나타나고 또 이렇게 해결되는 것이다.

선형변환 $T: V \to W$**가** <관계되는(associated) 외적 대수상에서> 대응하는 **준동형사상** $E(T): E(V) \to E(W)$ **를 유도(induce)한다**는 것을 눈여겨보아야 한다. 즉, 벡터공간 V로 부터 시작하는 이런 건설 과정이 바로 **평토적**(functorial)인 건설이다.

12. 닮음과 합

이제 선형대수학의 핵심적인 문제로 되돌아 가보자: 언제 <서로 다른 기저를 이용하여> 두 개의

정사각행렬이 같은 선형 자기준동형사상(linear endo- morphism) $T: V \to W$ 을 가질까? 또는 선형변환 T가 주어졌을 때 이것을 나타내는 **가장 간단한 행렬 표현**을 구할 수 있는가? $V=E$가 유클리드 공간이고 T가 자기수반변환인 경우에는 본장 제8절의 주축정리가 이런 물음에 답을 준다. 자기수반변환의 행렬 표현은 선형변환 T를 자신의 고유값이 주대각성분이 되는 대각선행렬로 바꾸어 준다. 그러나 언제나 이런 대각화가 가능한 것은 아니다. 예를 들면 아래의 2 ×2 행렬의 고유값은 0 밖에는 없다.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

그러나 이 행렬은 "영 자기준동형사상(trivial map)"의 행렬표현과는 다르므로 모든 성분이 0인 행렬과 닮음은 아니다. 따라서 일반적인 선형변환 T의 가장 간단한 행렬표현을 구하는 문제는 단지 고유값으로 만들 수 있는 대각선행렬을 구하는 이상의 이론과 노력이 필요하다는 것을 알 수 있다.

하나의 접근방법은 V를 벡터공간으로 보는 것이 아니라 추가적인 T와 이의 반복에 의해 주어진 **모듈**(module)같이 더 "풍부한" 대수체계로 보는 것이다. 이것이 무슨 뜻이냐 하면 V에 속하는 임의의 벡터 v 에, F에 속하는 스칼라만을 곱하는 것이 아니라 체 F의 원을 계수로 하는 T 안의 다항식을, 아래와 같이 곱할 수 있다는 것을 의미한다.

$$(a_0 + a_1 T + \cdots + a_k T^k)\mathrm{v} \;=\; a_1 \mathrm{v} + a_1 T\mathrm{v} + \cdots + a_k T^k \mathrm{v} \tag{2}$$

우리는 이것을 다항식, $a_0 + a_1 x + \cdots + a_k x^k$를 v 에 "곱"한 것이라고 부른다. 이런 x를 부정원으로 하는 모든 다항식의 집합은 가환 환(commutative ring), 즉 **다항식 환**(polynomial ring) $F[x]$을 형성한다. 벡터 v 에 그러한 다항식 스칼라를 곱하는 곱셈은 보통 곱이 갖는 모든 법칙을 만족한다. 따라서 (1)의 정의는 다음의 의미로 $F[x]$상의 "모듈(module)"로 V를 탄생시키는 것이다.

환 R상의 **모듈** M은, 다음과 같이 R에 속하는 스칼라 a와 M에 속하는 벡터 v 에 대하여 곱의 연산으로 $(a,\mathrm{v}) \mapsto a\mathrm{v}$ 을 갖는, 덧셈하의 가환 군(아벨 군, abelian group)이다.

$$a(\mathrm{v}+\mathrm{w}) = a\mathrm{v} + a\mathrm{w}, \qquad 1\mathrm{v} = \mathrm{v} \tag{3}$$
$$(a+b)\mathrm{v} \;=\; a\mathrm{v} + b\mathrm{v}, \qquad (ab)\mathrm{v} \;=\; a(b\mathrm{v}) \tag{4}$$

고차원의 기하학과 해석학에는 이 이외에도 다양한 모듈(modules) - 즉, "operators"로 이루어진 다양한 환에 작용(action)을 보탠 아벨군들-의 예가 있다. 예를 들면 미분형식들은 $d^2 = 0$인 연산 d의 **차수 붙은 모듈**(graded module)을 이룬다.

(3)식과 (4)식의 모듈공리는, 환 R에 속하는 스칼라 a는 곱셈 역원(multiplicative inverse)을 가질 필요는 없다는 것과 두 스칼라의 곱이 가환일 필요가 없다는 것을 제외하고는, 벡터공간 공리와 동일하다. 벡터공간의 많은 기본적인 이론은 모듈에서도 역시 불변이다. 특히 하나의 모듈로부터 다른 모듈로의 선형사상 $T: M \to N$에서는 더욱 그렇다. (M의 모든 연산에 대해 닫혀있는 M의 부분집합인) M의 부분모듈(submodule) S가 주어졌을 때 상 모듈(quotient module)

M/S와 S를 0으로 보내는 "유니버샬" 선형사상 $P: M \to M/S$를 만들 수 있다. 같은 환상의 두 모듈 M과 N이 주어졌을 때 $v \in M$이고 $w \in N$인 모든 순서쌍 (v, w)들로 이루어진 **직합**(direct sum) $M \oplus N$을 형성할 수 있다.

$$a_1(v_1, w_1) + a_2(v_2, w_2) = (a_1 v_1 + a_2 v_2,\ a_1 w_1 + a_2 w_2) \tag{5}$$

이것은 R의 모듈이다: 이것은 $v \leftarrow \langle v, w \rangle \mapsto w$로 주어진 인자(factor)로의 아래와 같은 선형사상을 가진다.

$$M \leftarrow M \oplus N \rightarrow N$$

이들은 유니버샬이므로, 제5장 9절에서 군에 대해 했듯이, M과 N의 곱 $M \oplus N$을 만든다. 이것은 또한 $v \mapsto (v, 0)$과 $w \mapsto (0, w)$로 주어진 인자(factor)로의 선형사상을 가진다.

$$M \rightarrow M \oplus N \leftarrow N$$

이들 역시 유니버샬이다. 따라서, 제5장 9절에서 만든 군에 대한 자유곱(free product)인 "쌍대곱(coproduct)"을 만든다.

체 F상의 벡터공간에 대하여, 여러 개의 (n개라고 하자) F의 직합, $F \oplus \cdots \oplus F$는 F에 속하는 스칼라의 n-순서쌍으로 이루어진 보통의 벡터공간이다. 모든 유한차원 벡터공간은, 기저가 결정되면, 이러한 모양을 가지게 된다. 그러나 이 마지막 문장은 모듈에서는 사실이 아니다: 즉, 환 R의 카피(copies)의 직합으로 표현 안 되는 환 R상의 많은 모듈이 있을 수 있다. 예를 들면, x^2의 모든 상수배로 이루어진 이데알 (x^2)을 가지고 다항식 환 $F[x]$의 상환(quotient ring)을 취하자. 그러면 상환, $F[x]/(x^2)$는 $R = F[x]$상의 모듈이다. 그러나 이는 R보다는 크기가 훨씬 작다. 모든 원소는 F에 속하는 a와 b를 계수로 하는 다항식, $a + bx$중의 하나의 모양이 된다. 이 원소에 x를 곱하는 것은 a를 ax로 보내고 bx를 0으로 보내는 ($x^2 = 0$으로 간주하는!) 선형변환 T이다. 다시 말해서, 모듈은, 기저벡터에 작용하여 $u_1 \mapsto u_2$, $u_2 \mapsto 0$로 보내는 선형 자기준동형 T를 갖는 (단지) F상의 2차원 벡터공간이다. 따라서 앞의 (1)에서 본 행렬과 똑같은 것이다. 이러한 방법으로 다항식 환 $F[x]$에서의 모든 모듈은 x의 곱으로 주어진 선형 자기준동형 $V \to V$와 함께 F상의 벡터공간 V이다.

다항식 환 $F[x]$에도, 정수 환 $\mathbb{Z}$에서 한 것과 마찬가지로, "나눗셈 알고리즘(division algorithm)"이 있다. 이 알고리즘을 이용하면 $F[x]$에 속하는 어떤 이데알 K도 0 이거나 아니면 어떤 (monic) 다항식 $f(x)$의 상수배로 이루어진 이데알 $K = (f(x))$중 하나라는 것을 증명할 수 있다. 이에 대응하는 상 모듈(quotient module), $F[x]/f(x)$는 다항식 $f(x)$의 차수 m을 차원으로 하는 F의 벡터공간 V이다. 이 벡터공간의 기저로 $1, x, x^2, \cdots, x^{m-1}$를 취하자. 그러면 이에 대응하는 자기준동형 $T: V \to V$에 x를 곱하면 각각의 기저벡터를 다음의 기저벡터로 보낸다. 그러나 마지막 기저벡터 x^{m-1}은 다음과 같이 된다.

$$x^m = -a_o - a_1 x - \cdots - a_{m-1}x^{m-1}$$

여기에서 $a_i \in F$는 $f(x) = a_0 + \cdots + a_{m-1}x^{m-1} + x^m$의 계수들이다. 따라서 이 기저에 대한 T의 행렬표현은 다음과 같이 된다(m=4 인 경우).

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -a_o \\ 1 & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & 1 & -a_3 \end{pmatrix} \qquad (6)$$

이것을 (다항식 $f(x)$의) **동반행렬**(companion matrix)이라고 부른다. 이 행렬은 닮음행렬 연구에서 주춧돌로서의 중요한 역할을 한다.

이 연구는 특별한 종류의 환(ring)상의 모듈을 이용한다. **정역**(integral domain)은, bc=0이면 b=0 또는 c=0 가 성립되는 가환 환이다. **주 이데알 정역**(principal ideal domain)이란, 정역 D의 모든 이데알 K가 D의 어떤 원 d의 곱들의 집합으로 표현되는, 즉 $K=(d)$, 정역 D를 말한다. $F[x]$와 $\mathbf{Z}$는 모두 주 이데알 정역이다. 그러한 D상의 모듈에 대하여 아래의 정리를 증명할 수 있다. (상당한 수고가 따름; *Algebra*, 제10장)

정 리 *만약에 주 이데알 정역상의 모듈 M이 유한 개수의 이들 원소에 의해 생성(span)된다면, M이 아래 식 (7)을 만족하는 수 r과 0이 아닌 각각이 다음 원의 상수 배인 D의 원소 $d_1, \cdots, d_k$가 존재한다;*

$$M \cong D \oplus \cdots \oplus D \oplus D/(d_1) \oplus \cdots \oplus D/(d_k) \qquad (7)$$

여기서, ((7)식의 D의 개수인) 정수 r과 이데알인 (d_i)는 M에 의해 유일하게 결정된다.

이 결과는, 체 F가 0과 F자신만이 이데알인 주 이데알 정역이므로, (체 F상의 모듈인) 벡터공간에도 적용된다. 그러나 (7)의 결과는 벡터공간에 비하여 모듈이 얼마나 복잡한지를 보여준다: F상의 유한차원 벡터공간 V에 대하여는 (7)식은 처음의 r개뿐인 $V \cong F \oplus \cdots \oplus F$ 이 된다. 일반적인 정역 D에 대하여 D상의 덧셈 모듈 $D/(d_i)$는, (제5 장의 6절의) 순환군과 마찬가지로 D의 항등원 하나에 의하여 생성되므로, **순환모듈**(cyclic module)이라고 부른다.

D가 다항식 환 $F[x]$일 때는 이 정리가 무엇을 의미할까? 이 경우에 모듈 M은, x에 의해 곱해지는 연산을 선형 자기준동형으로 하는, 바로 벡터공간 V이다. V가 유한차원인 경우에는 식 (7)의 분해에서 $D=F[x]$라는 인자(factor)는 존재하지 않는다. 왜냐하면 그러한 인자 D는 무한차원의 벡터공간 $F[x]$에 대응되기 때문이다. 그래서 단지 일련의 순환모듈 $D/(d_i)$만 존재한다. 각각의 이런 선형변환에 대응하는 행렬이 바로 (6)식에서 본 동반행렬이다. 따라서 다음 보조정리가 성립된다.

보조정리 *체 F상의 유한 차원 벡터 공간 V에서 선형 자기준동형 $T: V \to V$에 대하여*

T 의 행렬 표현이 다음과 같은 V 의 기저가 존재한다.

$$\begin{pmatrix} C_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & C_2 & & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & & C_k \end{pmatrix} \quad (8)$$

이 행렬의 주대각선에 있는 부분 행렬은 다항식 $d_i \in F[x]$의 동반 행렬(companion matrix) C_i 이다. 또한 각각의 d_i 는 d_{i+1}, $i = 1, \cdots, k-1$ 의 상수배이다.

수 k와 계수가 1인 모닉(monic) 다항식 d_i는 선형변환 T에 의해서 유일하게 결정된다.

이 모닉 다항식들은 T의 **불변인자**(invariant factors)라고 부른다. 그들은 닮음 하에서 불변적인 **완비체계**(complete system)를 형성한다; 두 개의 정사각행렬이 닮음일 필요충분조건은 그들이 같은 불변인자를 가지는 것이다. 마찬가지로 (8)식의 표현은 닮음인 (정사각)행렬의 **표준형**(canonical form)이라고 부른다. 같은 표준형을 가지는 모든 정사각행렬은 닮음(similar)이다. “rational 표준형”이나 “Jordan 표준형”과 같은 여러 가지 다른 표준형에 대하여도 살펴 볼 것이 많지만 여기서는 생략한다.

주 이데알 정역인 D가 정수 환 $\mathbb{Z}$일 때 이 정리는 무엇을 의미할까? 임의의 덧셈 가환 군, A를 생각해 보자. A에서 반복된 합(말하자면 3번 더하면 $a+a+a$)은 $3a = a+a+a$와 같이 A의 원소인 a에 정수를 곱해서 얻을 수 있다. 이 스칼라 곱은 모듈의 정의를 위해서 사용된 (3)식과 (4)식의 성질을 만족시킨다. 다시 말해서 가환군 A는 $\mathbb{Z}$-모듈과 같은 것이다.

보조정리 *임의의 유한 생성 아벨 군 A는 다음과 같이 $r-$ 개의 무한 순환 군 $\mathbb{Z}$와 m_i가 m_{i+1}의 곱인 순환 군 $m_1, m_2, \cdots, m_k$의 직합(direct sum)으로 나타낼 수 있다.*

$$A = \mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/(m_1) \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/(m_k) \quad (9)$$

이 수 r과 $m_1, m_2, \cdots, m_k$는 A 의 불변량(invariants)이다.

모든 유한생성 아벨군을, “불변량” r과 m_i를 이용하여 기술하는 이 결과는, **대수적 위상수학**(algebraic topology)에서 특히 유용하다. 다면체의 모든 **호몰로지군**(homology group) A는 유한생성 아벨군이다. 따라서 **베티수**(Betti numbers) r과 **비틀림계수**(torsion coefficients) m_i에 의해 결정된다.

(8)의 표준형에서 각각의 불변인자 d_i는 T의 **단인자**(elementary divisor)라고 불리는 기약다항식들의 거듭제곱(power)의 곱으로 쓸 수 있다; 또, 이에 대응하는 수반행렬 C_i의 분해(decomposition)도 존재한다. 예를 들면 아벨군에서 각각의 m_i는 소수 p_i의 거듭제곱의 곱 $p_1^{e_1} \cdots p_s^{e_s}$으로 쓸 수 있다. 그러면 $\mathbb{Z}_6 \cong \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_3$와 같이 다음과 같은 동형사상이 존재한

다.

$$\mathbb{Z}/(m_i) \cong \mathbb{Z}/(p_1^{e_1}) \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/(p_s^{e_s}) \qquad (10)$$

두 식 (9)와 (10)을 결합하면 이미 제5장 8절의 식 (4)에서 언급한 유한 아벨군의 분해를 얻을 수 있다. 그곳에서의 직적(direct product)은 여기에서의 직합(direct sum)과 같다.

우리가 주의해서 살펴야 하는 점은 아벨군에 대한 (9)식의 결과와 **동반행렬**에 대한 결과가 근본적으로 같다는 것이다. 각각의 증명(때로는 행렬의 신비스러운 전개에 의한 증명)은 근본적으로 같은 도구를 이용한 것으로 드러난다는 것이다. 따라서, 벡터공간으로부터 일반화된, 모듈의 개념을 이용하여 이 도구를 부호화 하면 좀 더 잘 이해될 것이다.

13. 요　약

선형대수학은 “벡터의 기하학적인 그림”과 <덧셈과 스칼라곱셈을 보존하는,> “선형” 연산이라는 기본적인 아이디어를 가지고 출발한다. 그리고 이 아이디어의 구체적인 형식화는 벡터공간 사이의 선형변환의 개념을 통해서만 가능하다. 선형변환을 다루면 바로 개념적인 형식화와 행렬의 계산 그리고 닮음이라는 문제들에 이르게 된다; 어떤 경우에 두 개의 행렬이 같은 선형 자기준동형 사상을 나타내는가? 그리고 선형대수학의 기하학 또 해석적 연구는 곧 쌍대공간, 내적 공간과 같은 다양한 공간을 우리에게 제공한다. 더 나아가 선형함수는 쌍선형함수는 물론 <공간사이의 텐서곱을 이용하여> 더욱 일반적인 곱(products)에 이르도록 해준다. 또 내적을 도입하면, 대칭 행렬의 닮음 문제는 고유값과 고유벡터만을 통해서 해결된다. 일반적으로 닮음 행렬을 가지고 표준형을 다룰 때 어떤 경우는 체 상의 벡터공간에서 한 단계 더 나아가 적당한 환(ring)상의 모듈을 생각해야 할 필요가 생기기도 한다. 여기서 요약을 하지는 않았지만 선형대수학의 앞으로의 발전도 같은 패턴을 가질 것이다-기하학과 해석학 사이의 상호작용, 선형성의 여러 현상의 이해와 형식화, 그리고 해석적인 연산과 선형 근사를 위한 다양체(manifold)의 이용에 대한 연구가 계속 필요하게 될 것이다.

〔참고문헌〕 Survey of Modern Algebra는 1941년에 Anglo-Saxon 형식의 행렬방법을 벡터공간의 개념적인 관점(Herman Weyl)에 성공적으로 결합한 최초의 교과서이다. 힐버트 공간(von Neumann)과의 이러한 연결은 Halmos의 고전적인 교과서 [1942]에서 더욱 강조되었으며 모듈의 이용은 Algebra와 Hungerford 의 저서 [1974]에서 강조되었다. 최신 컴퓨터가 큰 행렬을 능히 다룰 수 있도록 해주었음에도 불구하고 선형대수학 입문의 많은 교과서들은 불행히도 개념을 제대로 전달하기보다 작은 크기의 자질구레한 행렬조작에 정력을 낭비하며 이런 훌륭한 아이디어를 사장하고 있는 것이 못내 아쉽다. (Mac Lane)

************ Revised by SGLee 2009년 3월 27일 ****************